

## 习题解答

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

解 (1) 原式  $= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8$   
 $- 1 \times (-4) \times (-1) - 2 \times (-1) \times 8 - 0 \times 1 \times 3 = -4;$

(2) 原式  $= acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3$   
 $= 3abc - a^3 - b^3 - c^3;$

(3) 原式  $= 1 \cdot b \cdot c^2 + 1 \cdot c \cdot a^2 + 1 \cdot a \cdot b^2 - 1 \cdot b \cdot a^2 - 1 \cdot c \cdot b^2 - 1 \cdot a \cdot c^2$   
 $= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$

$$= c^2(b-a) + ab(b-a) - c(b^2-a^2) = (a-b)(b-c)(c-a);$$

(4) 原式  $= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - (x+y)^3 - x^3 - y^3$   
 $= -2(x^3 + y^3).$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4; (2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1; (4) 2 4 1 3;

(5) 1 3  $\cdots$   $(2n-1)$  2 4  $\cdots$   $(2n)$ ;

(6) 1 3  $\cdots$   $(2n-1)$   $(2n)$   $(2n-2)$   $\cdots$  2.

解 (1) 此排列为自然排列, 其逆序数为 0;

(2) 此排列的首位元素的逆序数为 0; 第 2 位元素 1 的逆序数为 1; 第 3 位元素 3 的逆序数为 1; 末位元素 2 的逆序数为 2, 故它的逆序数为  $0+1+1+2=4$ ;

(3) 此排列的前两位元素的逆序数均为 0; 第 3 位元素 2 的逆序数为 2; 末位元素 1 的逆序数为 3, 故它的逆序数为  $0+0+2+3=5$ ;

(4) 类似于上面, 此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为 0, 0, 2, 1, 故它的逆序数为  $0+0+2+1=3$ ;

(5) 注意到这  $2n$  个数的排列中, 前  $n$  位元素之间没有逆序对. 第  $n+1$  位元素 2 与它前面的  $n-1$  个数构成逆序对, 故它的逆序数为  $n-1$ ; 同理, 第  $n+2$  位元素 4 的逆序数为  $n-2$ ;  $\cdots$ ; 末位元素  $2n$  的逆序数为 0. 故此排列的逆序数

为  $(n-1) + (n-2) + \cdots + 0 = \frac{1}{2}n(n-1)$ ;

(6) 与(5)相仿,此排列的前  $n+1$  位元素没有逆序对;第  $n+2$  位元素  $(2n-2)$  的逆序数为 2;第  $n+3$  位元素  $2n-4$  与它前面的  $2n-3, 2n-1, 2n, 2n-2$  构成逆序对,故它的逆序为 4;...;末位元素 2 的逆序数为  $2(n-1)$ ,故此排列的逆序数为  $2+4+\cdots+2(n-1) = n(n-1)$ .

3. 写出四阶行列式中含有因子  $a_{11}a_{23}$  的项.

解 由行列式定义知这项必还含有分别位于第 3 行和第 4 行的某两元素,而它们又分别位于第 2 列和第 4 列,即  $a_{32}$  和  $a_{44}$  或  $a_{34}$  和  $a_{42}$ . 注意到排列 1324 与 1342 的逆序数分别为 1 与 2,故此行列式中含有  $a_{11}a_{23}$  的项为  $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$  与  $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ .

4. 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

解 (1)

$$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 10r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + 15r_2 \\ r_4 + 7r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

= 0 (因第 3、4 行成比例);

$$(2) D \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (因有两行相同);}$$

$$(3) D \begin{array}{l} r_1 \div a \\ r_2 \div d \\ r_3 \div f \end{array} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \begin{array}{l} c_1 \div b \\ c_2 \div c \\ c_3 \div e \end{array} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef;$$

$$(4) D \begin{array}{l} r_1 + ar_2 \\ r_3 + dc_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} c_3 + dc_2 \\ r_3 + dc_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } r_3 \text{ 展开}} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}$$

$$= (1+ab)(1+cd) + ad.$$

5. 求解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 其中 } a, b, c$$

互不相等.

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 左式} & \begin{array}{l} r_1 + r_2 \\ r_1 \div (x+3) \end{array} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \\ & \begin{array}{l} c_2 - c_1 \\ (x+3) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} \\ & = (x+3) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x^2-3). \end{aligned}$$

于是方程的解为:  $x_1 = -3, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$ ;

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式, 由例 12 的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

因  $a, b, c$  互不相等, 故方程的解为:  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ .

6. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

$$(2) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

$$\text{证 (1) 左式} \frac{c_1 - c_3}{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{c_1 - 2c_2}{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 = \text{右式};$$

(2) 将左式按第 1 列拆开得

$$\text{左式} = \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = aD_1 + bD_2,$$

其中  $D_1 = \begin{vmatrix} x & ay + bz & az + bx \\ y & az + bx & ax + by \\ z & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} \frac{c_3 - bc_1}{c_3 \div a} a \begin{vmatrix} x & ay + bz & z \\ y & az + bx & x \\ z & ax + by & y \end{vmatrix}$

$$\frac{c_2 - bc_3}{c_2 \div a} a^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} y & ay + bz & az + bx \\ z & az + bx & ax + by \\ x & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} \frac{c_2 - ac_1}{c_2 \div b} b \begin{vmatrix} y & z & az + bx \\ z & x & ax + by \\ x & y & ay + bz \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_3 - ac_2}{c_3 \div b} b^2 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \frac{c_3 \leftrightarrow c_2}{c_2 \leftrightarrow c_1} b^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

于是  $D = aD_1 + bD_2 = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右式}.$

(3) 左式  $\frac{c_4 - c_3}{c_3 - c_2} \frac{c_3 - c_2}{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a + 1 & 2a + 3 & 2a + 5 \\ b^2 & 2b + 1 & 2b + 3 & 2b + 5 \\ c^2 & 2c + 1 & 2c + 3 & 2c + 5 \\ d^2 & 2d + 1 & 2d + 3 & 2d + 5 \end{vmatrix}$

$$\frac{c_4 - c_3}{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a + 1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b + 1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c + 1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d + 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{因有两列相同});$$

(4) 左式  $\frac{r_4 - a^2 r_3}{r_3 - ar_2} \frac{r_3 - ar_2}{r_2 - ar_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b - a & c - a & d - a \\ 0 & b(b - a) & c(c - a) & d(d - a) \\ 0 & b^2(b^2 - a^2) & c^2(c^2 - a^2) & d^2(d^2 - a^2) \end{vmatrix}$

$$\frac{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}{\text{各列提取公因子}} (b - a)(c - a)(d - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b + a) & c^2(c + a) & d^2(d + a) \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_3 - b(b + a)r_2}{r_2 - br_1} (b - a)(c - a)(d - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c - b & d - b \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (b - a)(c - a)(d - a) \begin{vmatrix} c - b & d - b \\ x & y \end{vmatrix},$$

其中:  $x = c^2(c + a) - (bc)(b + a) = c(c^2 + ac - b^2 - ab) = c(a + b + c)(c - b)$ ;  
 $y = d^2(d + a) - bd(b + a) = d(a + b + d)(d - b).$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix} &= (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix} \\
 &= (c-b)(d-b)[d(a+b+d) - c(a+b+c)] \\
 &= (c-b)(d-b)[(d-c)(a+b) + d^2 - c^2] \\
 &= (c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d),
 \end{aligned}$$

因此,左式 =  $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$  = 右式.

(5) 证一 递推法. 按第 1 列展开, 以建立递推公式,

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= xD_n + (-1)^{n+2} a_0 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & * & & x & -1 \end{vmatrix} \\
 &= xD_n + (-1)^{2n+2} a_0 = xD_n + a_0.
 \end{aligned}$$

又, 归纳基础为:  $D_1 = a_n$  (注意不是  $x$ ), 于是

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= xD_n + a_0 \\
 &= x(xD_{n-1} + a_1) + a_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 D_{n-1} + a_1 x + a_0 \\
 &= \dots \\
 &= x^n D_1 + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.
 \end{aligned}$$

证二 按最后一行展开得

$$D_{n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} a_j \underbrace{\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & x \end{vmatrix}}_j \underbrace{\begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & -1 & \\ & & & x & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & x & -1 \end{vmatrix}}_{n-j}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2+n-j} a_j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.
 \end{aligned}$$

7. 设  $n$  阶行列式  $D = \det(a_{ij})$ , 把  $D$  上下翻转、或逆时针旋转  $90^\circ$ 、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明  $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D, D_3 = D$ .

证 (1) 先计算  $D_1$ , 为此通过交换行将  $D_1$  变换成  $D$ , 从而找出  $D_1$  与  $D$  的关系.

$D_1$  的最后一行是  $D$  的第 1 行, 把它依次与前面的行交换, 直至换到第 1 行, 共进行  $n-1$  次交换; 这时最后一行是  $D$  的第 2 行, 把它依次与前面的行交换, 直至换到第 2 行, 共进行  $n-2$  次交换; …… , 直至最后一行是  $D$  的第  $n-1$  行, 再通过一次交换将它换到第  $n-1$  行, 这样就把  $D_1$  变换成  $D$ , 共进行

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2} n(n-1)$$

次交换, 故  $D_1 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D$ .

注 1° 上述交换行列式的行(列)的方法, 在解题时, 经常用到. 它的特点是在把最后一行换到某一行的同时, 保持其余  $n-1$  个行之间原有的先后次序(但行的序号可能改变). 2° 同理把  $D$  左右翻转所得行列式为  $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D$ .

(2) 计算  $D_2$ . 注意到  $D_2$  的第  $1, 2, \dots, n$  行恰好依次是  $D$  的第  $n, n-1, \dots, 1$  列, 故若把  $D_2$  上下翻转得  $\tilde{D}_2$ , 则  $\tilde{D}_2$  的第  $1, 2, \dots, n$  行依次是  $D$  的第  $1, 2, \dots, n$  列, 即  $\tilde{D}_2 = D^T$ . 于是由(1)

$$D_2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{D}_2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D^T = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D.$$

(3) 计算  $D_3$ . 注意到若把  $D_3$  逆时针旋转  $90^\circ$  得  $\tilde{D}_3$ , 则  $\tilde{D}_3$  的第  $1, 2, \dots, n$  列恰好是  $D$  的第  $n, n-1, \dots, 1$  列, 于是再把  $\tilde{D}_3$  左右翻转就得到  $D$ . 由(1)之注及(2), 有

$$D_3 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{D}_3 = D.$$

注 本例的结论值得记取, 即对行列式  $D$  作转置、依副对角线翻转、旋转  $180^\circ$  所得行列式不变; 作上下翻转、左右翻转、逆(顺)时针旋转  $90^\circ$  所得行列式为  $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D$ .

8. 计算下列各行列式( $D_k$  为  $k$  阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}, \text{其中对角线上元素都是 } a, \text{未写出的元素都是 } 0;$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

提示:利用范德蒙德行列式的结果.

$$(4) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & \ddots & & & & & & \ddots \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}, \text{其中未写出的元素都是 } 0;$$

$$(5) D_n = \det(a_{ij}), \text{其中 } a_{ij} = |i-j|;$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

(1) 解一 把  $D_n$  按第一行展开得

$$D_n = a^n + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第一列}} a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

解二

$$D_n \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_n} \begin{vmatrix} a & 0 & & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & & & a \\ & & & a & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a & \\ 0 & a & & & & & & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_n} \begin{vmatrix} a & 1 & & & & & & \\ 1 & a & & & & & & \\ & & & a & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a & \\ & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{由例 10}} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & & a \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

(2) 本题中  $D_n$  是教材例 8 中行列式的一般形式,它是一个非常有用的行列式,在以后各章中有不少应用.

解 利用各列的元素之和相同,提取公因式.

$$D_n \xrightarrow{r_1+r_2+\dots+r_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{c_i-ac_1 \\ i=2,\dots,n}} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x-a & & & \\ & \ddots & & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1} [x+(n-1)a].$$

(3) 解 把所给行列式上下翻转,即为范德蒙德行列式,若再将它左右翻转,由于上下翻转与左右翻转所用交换次数相等,故行列式经上下翻转再左右翻转(相当于转  $180^\circ$ ,参看题 7)其值不变.于是按范德蒙德行列式的结果,可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (i-j)$$

(4) 解 本题与例 11 相仿,解法也大致相同,用递推法.

$$D_{2n} \xrightarrow{\substack{r_2 \leftrightarrow r_{2n} \\ c_2 \leftrightarrow c_{2n}}} \begin{vmatrix} a_n & b_n & \cdots & 0 \\ c_n & d_n & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & D_{2(n-1)} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{由例 10}} (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

即有递推公式

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}.$$

另一方面,归纳基础为  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$ ,利用这些结果,递推得

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k).$$

(5) 解

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{\begin{matrix} r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2} \\ \cdots \\ r_2-r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{matrix} c_1+c_n \\ c_2+c_n \\ \cdots \\ c_{n-1}+c_n \end{matrix}]{\begin{matrix} n-1 & n & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{matrix}} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

(6) 解 将原行列式化为上三角形行列式. 为此, 从第 2 行起, 各行均减去第 1 行, 得与例 1.3 相仿的行列式

$$D_n \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & \cdots & & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{c_1+\frac{a_1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_n \end{vmatrix},$$

其中  $b = 1 + a_1 + a_1 \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} = a_1 \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$ . 于是

$$D_n = a_1 \cdots a_n \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

9. 设  $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ ,  $D$  的  $(i, j)$  元的代数余子式记作  $A_{ij}$ , 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

解 与例 13 相仿,  $A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$  等于用 1, 3, -2, 2 替换  $D$  的第 3 行对应元素所得行列式, 即

$$\begin{aligned}
A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \div (-2) \\ \text{按 } c_4 \text{ 展开}}} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 24.
\end{aligned}$$

10. 用克拉默法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{解 (1) } D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{r_3+5r_2 \\ r_4+2r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142;
\end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-2r_1}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ -10 & -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\text{按 } c_3 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ -10 & -1 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+3r_3 \\ r_2-2r_3}} \begin{vmatrix} -27 & 0 & 32 \\ 23 & 0 & -22 \\ -10 & -1 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -27 & 32 \\ 23 & -22 \end{vmatrix} = -142;
\end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -12 & -3 & -7 \\ -15 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 - 2r_3 \\ r_2 - 3r_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 23 & 0 & -13 \\ 33 & 0 & -31 \\ -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按 } c_2 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 23 & -13 \\ 33 & -31 \end{vmatrix} = -284;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & -5 & -12 & -7 \\ 0 & -2 & -15 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + 5r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -47 & 8 \\ 0 & 0 & -29 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -47 & 8 \\ -29 & 14 \end{vmatrix} = -426;$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & -12 \\ 0 & -2 & -1 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + 5r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -5 & -29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -47 \\ -5 & -29 \end{vmatrix} = 142,$$

由克拉默法则,得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, x_4 = \frac{D_4}{D} = -1;$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

而  $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 65; \quad (*)$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 114,$$

于是  $D = 325 - 114 = 211;$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{由(*)式} \quad 65 - 216 = -151; \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_2 \text{ 展开}} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -19 + 180 = 161; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_3 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5 - 114 = -109; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_4 \text{ 展开}} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ & \text{由(*)式} \quad -1 + 65 = 64. \end{aligned}$$

由克拉默法则,得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{151}{211}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{161}{211}, x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{109}{211}, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{64}{211}.$$

11. 问  $\lambda, \mu$  取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 由定理 5', 此时方程组的系数行列式必须为 0.

$$\text{因 } D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\lambda - 1),$$

故只有当  $\mu = 0$  或  $\lambda = 1$  时,方程组才可能有非零解.

当  $\mu = 0$ ,原方程组成为

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$$

显然  $x_1 = 1, x_2 = 1 - \lambda, x_3 = -1$  是它的一个非零解;

当  $\lambda = 1$ ,原方程组成为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

显然,  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$  是它的一个非零解.

因此,当  $\mu = 0$  或  $\lambda = 1$  时,方程组有非零解.

注 定理 5(或定理 5')仅表明齐次线性方程组要有非零解,它的系数行列

式必为零.至于这条件是否充分将在第三章中予以解决,目前还是应验证它有非零解.下题也是同样情形.

12. 问  $\lambda$  取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 若方程组有非零解,由定理 5', 它的系数行列式  $D=0$ .

$$\begin{aligned} \text{因 } D &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-(1-\lambda)r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ 0 & -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \lambda-3 & 3\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 \div \lambda \\ r_2 \div (\lambda-3)}} -\lambda(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

故  $D=0 \Rightarrow \lambda=0$  或  $\lambda=2$  或  $\lambda=3$ , 并且不难验证:

当  $\lambda=0$  时,  $x_1=-2, x_2=1, x_3=1$ ; 当  $\lambda=2$  时,  $x_1=-2, x_2=3, x_3=1$ ; 当  $\lambda=3$  时,  $x_1=-1, x_2=5, x_3=2$  均是该方程组的非零解. 所以当  $\lambda=0, 2, 3$  时方程组有非零解.

## 习题解答

1. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2);$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}_{3 \times 1};$$

$$(2) (1, 2, 3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = (10)_{1 \times 1} = 10;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} (-1, 2)_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 3};$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= (x_1, x_2, x_3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_3x_1$$

$$+ a_{23}x_3x_2 + a_{33}x_3^2$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

$$2. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

求  $3AB - 2A$  及  $A^T B$ .

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{于是 } 3AB - 2A = 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 15 & 24 \\ 0 & -15 & 18 \\ 6 & 27 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix};$$

因  $A^T = A$ , 即  $A$  为对称阵, 故

$$A^T B = AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从  $z_1, z_2, z_3$  到  $x_1, x_2, x_3$  的线性变换.

解 依次将两个线性变换写成矩阵形式:

$$X = AY, Y = BZ,$$

其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  分别为对应的系数矩阵;  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ . 在这些记号下, 从  $z_1, z_2, z_3$  到  $x_1, x_2, x_3$  的线性变换的矩

阵形式为

$$X = AY = A(BZ) = (AB)Z = CZ,$$

这里矩阵

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

4. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 问:

- (1)  $AB = BA$  吗?
- (2)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  吗?
- (3)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$  吗?

解 (1) 因  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ , 故  $AB \neq BA$ ;

(2)  $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2,$

但由(1),  $AB \neq BA$ , 故  $AB + BA \neq 2AB$ , 从而

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2;$$

(3)  $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$ , 但由(1),  $AB \neq BA$ , 故  $BA - AB \neq O$ , 从而

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

5. 举反例说明下列命题是错误的:

- (1) 若  $A^2 = O$ , 则  $A = O$ ;  
 (2) 若  $A^2 = A$ , 则  $A = O$  或  $A = E$ ;  
 (3) 若  $AX = AY$ , 且  $A \neq O$ , 则  $X = Y$ .

解 (1) 取  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 有  $A^2 = O$ , 但  $A \neq O$ ;

(2) 取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 有  $A^2 = A$ , 但  $A \neq O$  且  $A \neq E$ ;

(3) 取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Y = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 有  $AX = AY$ , 且  $A \neq O$ ,

但  $X \neq Y$ .

6. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^2, A^3, \dots, A^k$ .

解 直接计算得  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

一般可得  $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$ , (2.3)

事实上, 当  $k=1$  时, (2.3) 式显然成立;

设当  $k=n$  时, (2.3) 式成立, 那么当  $k=n+1$  时,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

由归纳法, 知(2.3)式成立.

7. 设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , 求  $A^n$ .

解 把  $A$  写成两个矩阵之和

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B,$$

其中三阶矩阵  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  满足  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B^k = O$  ( $k \geq 3$ ).

于是  $A^n = (\lambda E + B)^n = C_n^0 \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + \cdots + C_n^n B^n$   
 $= C_n^0 \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2$   
 $= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda & n\lambda & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \lambda & n\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (n \geq 2).$

8. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 且  $A$  为对称阵, 证明  $B^T A B$  也是对称阵.

证 根据矩阵乘积的转置规则, 有

$$(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B \quad (\text{因 } A \text{ 为对称阵}),$$

故由定义, 知  $B^T A B$  为对称阵.

9. 设  $A, B$  都是  $n$  阶对称阵, 证明  $AB$  是对称阵的充要条件是  $AB = BA$ .

证 因  $A^T = A, B^T = B$ , 故

$$\begin{aligned} AB \text{ 为对称阵} &\Leftrightarrow (AB)^T = AB \\ &\Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB. \end{aligned}$$

10. 求下列矩阵的逆阵:

(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ;      (2)  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ;

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ ;      (4)  $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$

解 (1) 由二阶方阵的求逆公式(教材例 10)得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$(3) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 并且}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -32, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix};$$

(4) 因  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ , 故  $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 于是矩阵  $B = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$  是有意义的, 并且因

$$AB = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \\ = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = E_n,$$

由定理 1 的推论, 知  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = B = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$ .

注 本题结论值得记取, 可当作公式用.

11. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 因矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  的行列式 = 1, 不为零, 故它可逆, 从而用它的逆矩阵左乘方程两边, 得.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(2) 记矩阵方程为  $XA_{3 \times 3} = B_{2 \times 3}$ , 因

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

故  $A$  可逆, 用  $A^{-1}$  右乘方程的两边得

$$X = BA^{-1}.$$

又,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} X &= BA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -8 & 15 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 记  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 则矩阵方程可写为

$$AXB = C.$$

因  $|A| = 6 \neq 0$ ,  $|B| = 2 \neq 0$ , 故  $A, B$  均可逆. 依次用  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  左乘和右乘方程两边得

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) 本题与(3)相仿. 因矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  的行列式都是 -1, 故

均是可逆阵, 并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\text{故得 } X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

12. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解 将方程组写作矩阵形式

$$Ax = b,$$

这里,  $A$  为系数矩阵,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  为未知数矩阵,  $b$  为常数矩阵.

$$(1) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 于是}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -23 & 13 & 4 \\ 13 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 于是}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

13. 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

求从变量  $x_1, x_2, x_3$  到变量  $y_1, y_2, y_3$  的线性变换.

解 记  $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 则线性变换的矩阵形式为  $x =$

$Ay$ , 其中  $A$  为它的系数矩阵. 因  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , 故  $A$  是可逆阵, 于

是从变量  $x_1, x_2, x_3$  到变量  $y_1, y_2, y_3$  的线性变换的矩阵形式为

$$y = A^{-1}x.$$

$$\text{又, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = A^* = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

14. 设  $A$  为三阶矩阵,  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求  $|(2A)^{-1} - 5A^*|$ .

解 因  $|A| = \frac{1}{2} \neq 0$ , 故  $A$  可逆. 于是由

$$A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} \text{ 及 } (2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1},$$

得

$$(2A)^{-1} - 5A^* = \frac{1}{2}A^{-1} - \frac{5}{2}A^{-1} = -2A^{-1},$$

两端取行列式得

$$|(2A)^{-1} - 5A^*| = |-2A^{-1}| = (-2)^3 |A|^{-1} = -16.$$

注 先化简矩阵, 再取行列式, 往往使计算变得简单.

15. 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $AB = A + 2B$ , 求  $B$ .

解 由  $AB = A + 2B \Rightarrow (A - 2E)B = A$ .

因  $A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 它的行列式  $\det(A - 2E) = 2 \neq 0$ , 故它是可逆阵.

用  $(A - 2E)^{-1}$  左乘上式两边得

$$\begin{aligned} B &= (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $AB + E = A^2 + B$ , 求  $B$ .

解 由方程  $AB + E = A^2 + B$ , 合并含有未知矩阵  $B$  的项, 得

$$(A - E)B = A^2 - E = (A - E)(A + E).$$

又,  $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其行列式  $\det(A - E) = -1 \neq 0$ , 故  $A - E$  可逆, 用

$(A - E)^{-1}$  左乘上式两边, 即得

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. 设  $A = \text{diag}(1, -2, 1)$ ,  $A^*BA = 2BA - 8E$ , 求  $B$ .

解 由于所给矩阵方程中含有  $A$  及其伴随阵  $A^*$ , 因此仍从公式  $AA^* = |A|E$  着手. 为此, 用  $A$  左乘所给方程两边, 得

$$AA^*BA = 2ABA - 8A,$$

又,  $|A| = -2 \neq 0$ , 故  $A$  是可逆矩阵, 用  $A^{-1}$  右乘上式两边, 得

$$|A|B = 2AB - 8E \Rightarrow (2A + 2E)B = 8E \Rightarrow (A + E)B = 4E.$$

注意到  $A + E = \text{diag}(1, -2, 1) + \text{diag}(1, 1, 1) = \text{diag}(2, -1, 2)$  是可逆矩阵, 且

$$(A + E)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right),$$

于是

$$B = 4(A + E)^{-1} = \text{diag}(2, -4, 2).$$

18. 已知矩阵  $A$  的伴随阵  $A^* = \text{diag}(1, 1, 1, 8)$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 求  $B$ .

解 先由  $A^*$  来确定  $|A|$ . 由题意知  $A^{-1}$  存在, 有  $A^* = |A|A^{-1}$ , 得  $|A^*| = |A|^4|A^{-1}| = |A|^3$ , 而  $|A^*| = 8$ , 故  $|A| = 2$ . 再化简所给矩阵方程

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$$

$$\Rightarrow (A - E)BA^{-1} = 3E$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (A - E)B = 3A \\ &\Rightarrow (E - A^{-1})B = 3E. \end{aligned}$$

由  $|A| = 2$ , 知  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1, 1, 8) = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$ ,

$$E - A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3\right).$$

得  $(E - A^{-1})^{-1} = \text{diag}\left(2, 2, 2, -\frac{1}{3}\right)$ .

于是  $B = 3(E - A^{-1})^{-1} = 3\text{diag}\left(2, 2, 2, -\frac{1}{3}\right) = \text{diag}(6, 6, 6, -1)$ .

19. 设  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 其中  $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{11}$ .

解 本题与教材例 13 相仿. 因  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 故  $A = PAP^{-1}$ .

于是  $A^{11} = PA^{11}P^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2^{13} & 4+2^{13} \\ -1-2^{11} & -4-2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

20. 设  $AP = PA$ , 其中  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ ,

求  $\varphi(A) = A^8(5E - 6A + A^2)$ .

解 因  $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ , 故  $P$  是可逆阵. 于是, 由  $AP = PA$

得  $A = PAP^{-1}$ , 并且记多项式  $\varphi(x) = x^8(5 - 6x + x^2)$ , 有

$$\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

因  $\Lambda$  是三阶对角阵, 故

$$\varphi(\Lambda) = \text{diag}(\varphi(-1), \varphi(1), \varphi(5)) = \text{diag}(12, 0, 0),$$

于是  $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}P^{-1}\right)$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注, 由于  $\varphi(A)$  除(1,1)元外均是0, 故在求  $P^*$  时, 只需计算  $P$  的(1,1)元、(2,1)元、(3,1)元的代数余子式  $A_{11}, A_{21}$  和  $A_{31}$ .

21. 设  $A^k = O$  ( $k$  为正整数), 证明  $E - A$  可逆, 并且其逆矩阵  $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ .

$$\text{证 由 } (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E + A + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 - \cdots - A^k \\ = E - O = E,$$

由定理 2 之推论知  $E - A$  可逆, 且其逆矩阵  $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$ .

注 判断矩阵  $B$  是否为  $A$  的逆矩阵, 最直接、最简单的方法就是验证  $AB$  (或者  $BA$ ) 是否等于单位矩阵, 就像判断 3 是否为  $\frac{1}{3}$  的逆只需验证  $\frac{1}{3} \times 3$  是否等于 1 一样. 下一题及例 2.1 都是这一思想的应用.

22. 设方阵  $A$  满足

$$A^2 - A - 2E = O, \quad (2.4)$$

证明  $A$  及  $A + 2E$  都可逆, 并求  $A^{-1}$  及  $(A + 2E)^{-1}$ .

解 先证  $A$  可逆. 由(2.4)式得

$$A(A - E) = 2E;$$

也就是

$$A \left( \frac{1}{2}(A - E) \right) = E.$$

由定理 2 之推论知  $A$  是可逆的, 且  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$ ;

再证  $A + 2E$  可逆. 用例 2.1 的解法, 由

$$(A + 2E)(A - 3E) = A^2 - A - 6E = 2E - 6E = -4E,$$

$$\text{即 } (A + 2E) \left[ \frac{1}{4}(3E - A) \right] = E,$$

同理, 知  $A + 2E$  可逆, 且  $(A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A)$ .

23. 设矩阵  $A$  可逆, 证明其伴随阵  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

证 因  $AA^* = |A|E$  及  $|A| \neq 0$ , 由定理 2 的推论知  $A^*$  可逆, 且

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A,$$

另一方面, 因  $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$ .

用  $A$  左乘此式两边得

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|A = \frac{1}{|A|}A,$$

比较上面两个式子, 即知结论成立.

24. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随阵为  $A^*$ , 证明:

(1) 若  $|A| = 0$ , 则  $|A^*| = 0$ ;

(2)  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

证 (1) 因

$$A^* A = |A| E, \quad (2.5)$$

当  $|A| = 0$  时, 上式成为  $A^* A = O$ .

要证  $|A^*| = 0$ , 用反证法: 设  $|A^*| \neq 0$ , 由矩阵可逆的充要条件知,  $A^*$  是可逆矩阵, 用  $(A^*)^{-1}$  左乘上式等号两边, 得  $A = O$ . 于是推得  $A$  的所有  $n-1$  阶子式, 亦即  $A^*$  的所有元素均为零. 这导致  $A^* = O$ . 此与  $A^*$  为可逆矩阵矛盾. 这一矛盾说明, 当  $|A| = 0$  时,  $|A^*| = 0$ .

(2) 分两种情形:

情形 1:  $|A| = 0$ . 由 (1),  $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ , 结论成立;

情形 2:  $|A| \neq 0$ . 在 (2.5) 式的两边取行列式, 得

$$|A^*| |A| = |A^* A| = ||A| E_n| = |A|^n.$$

于是  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

注 本题 (2) 的结果值得记取.

$$25. \text{ 计算 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

解 与教材例 15 相同, 本题练习分块矩阵乘法. 记

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

则

$$\text{原式} = \begin{pmatrix} A_{11} & E_2 \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & B_{12} \\ O & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} B_{12} + B_{22} \\ O & A_{22} B_{22} \end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{aligned} A_{11} B_{12} + B_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \\ A_{22} B_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$26. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 求 } |A^8| \text{ 及 } A^4.$$

解 若记  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  成为一

个分块对角矩阵. 于是

$$|A^8| = |A|^8 = (|A_1| |A_2|)^8 = |A_1|^8 |A_2|^8 = 10^{16};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}.$$

因  $A_1^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 25E$ , 故  $A_1^4 = 5^4 E$ ;  $A_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 故  $A_2^4 = 2^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  (可参看习题 6). 代入即得

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

27. 设  $n$  阶矩阵  $A$  与  $s$  阶矩阵  $B$  都可逆, 求

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}; \quad (2) \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}.$$

解 (1) 因  $A$  和  $B$  均可逆, 作分块阵  $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ , 由分块矩阵乘法规则,

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{n+s}.$$

于是  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  可逆, 且  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ .

(2) 求  $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$  的逆阵, 就是求  $n+s$  阶方阵  $X$ , 使

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} X = E_{n+s}. \quad (2.6)$$

为此, 根据原矩阵的分块情况, 对  $X$  作一样的分块,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中  $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$  是未知矩阵 (为明确起见, 它们依次是  $n \times n, n \times s, s \times n, s \times s$  矩阵). 把上式代入 (2.6) 式得到

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11} + BX_{21} & CX_{12} + BX_{22} \end{pmatrix}.$$

比较上式两端两个矩阵, 有

$$AX_{11} = E_n \Rightarrow X_{11} = A^{-1};$$

$$AX_{12} = O \Rightarrow X_{12} = O;$$

$$CX_{12} + BX_{22} = E_s \Rightarrow BX_{22} = E_s \Rightarrow X_{22} = B^{-1};$$

$$CX_{11} + BX_{21} = O \Rightarrow BX_{21} = -CX_{11} = -CA^{-1} \Rightarrow X_{21} = -B^{-1}CA^{-1}.$$

于是得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = X = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

28. 求下列矩阵的逆阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

解 (1) 将  $A$  分块为  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ , 因  $|A_1| = 1$ ,  $|A_2| = 1$ , 故它们均可逆. 于是由分块对角矩阵的性质, 有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix};$$

(2) 记  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . 因  $|B| = 2$ ,  $|C| = 12$ , 故  $B, C$  均是可逆阵. 由 27 题(2)的结论, 得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix},$$

由  $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C^{-1}DB^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ , 得

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

## 习题解答

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 \times (-1)} \\
 \widetilde{r_1 - 2r_2} \\
 \widetilde{r_3 + 2r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & 1 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix}
 0 & 2 & -3 & 1 \\
 0 & 3 & -4 & 3 \\
 0 & 4 & -7 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 - r_1} \\
 \widetilde{r_3 - 2r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 2 & -3 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -3
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_1 \leftrightarrow r_2} \\
 \widetilde{r_1 + r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 2 & -3 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & -3
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 - 2r_1} \\
 \widetilde{r_2 \times (-1)} \\
 \widetilde{r_1 + r_2} \\
 \widetilde{r_3 + r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -3 \\
 0 & 0 & -1 & -3
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & 1 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix}
 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\
 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\
 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\
 3 & -3 & 4 & -2 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 - r_1} \\
 \widetilde{r_3 - 2r_1} \\
 \widetilde{r_4 - 3r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\
 0 & 0 & -5 & 10 & -10
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \widetilde{r_1 - 3r_2} \\
 \widetilde{r_3 + 3r_2} \\
 \widetilde{r_4 + 5r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix}
 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\
 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\
 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\
 2 & -3 & 7 & 4 & 3
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_1 \leftrightarrow r_2} \\
 \widetilde{r_3 - 3r_1} \\
 \widetilde{r_4 - 2r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\
 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\
 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\
 0 & -7 & 7 & 8 & 11
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 \times (-1)} \\
 \widetilde{r_1 - 2r_2} \\
 \widetilde{r_3 + 8r_2} \\
 \widetilde{r_4 + 7r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 + r_3} \\
 \widetilde{r_4 - r_3}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

2. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , 求一个可逆阵  $P$ , 使  $PA$  为行最简形.

解  $(A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 - 2r_1} \\
 \widetilde{r_3 - 5r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c}
 \widetilde{r_2 \times (-1)} \\
 \widetilde{r_1 - 2r_2} \\
 \widetilde{r_3 + 6r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & 1
 \end{pmatrix},$$

故  $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ , 并且  $A$  的行最简形为  $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3. 设  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , (1) 求一个可逆阵  $P$ , 使  $PA$  为行最简形;

(2) 求一个可逆阵  $Q$ , 使  $QA^T$  为行最简形.

解 (1)  $(A, E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

于是  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , 且  $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  为  $A$  的行最简形;

(2)  $(A^T, E) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix},$$

于是  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ , 并且  $QA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  为  $A^T$  的行最简形.

4. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆阵:

(1)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; (2)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

解 记所给的矩阵为  $A$ .

(1)  $(A, E) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 4r_3]{r_3 \div (-2)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

因  $A \sim E$ , 由定理 1 之推论, 知  $A$  可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$(2) (A, E) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 \leftrightarrow r_3, r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_3 - 3r_1, r_4 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 + 2r_2, r_3 - 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 - r_3, r_2 - 2r_3, r_4 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 + r_4, r_2 + r_4, r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix},$$

因  $A \sim E$ , 由定理 1 之推论, 知  $A$  可逆, 并且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

5. (1) 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $AX = B$ ;

(2) 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $XA = B$ .

解 (1) 与教材例 3 相仿, 若  $A$  是可逆矩阵, 则可求得矩阵方程的解为  $X = A^{-1}B$ , 而判断  $A$  是否可逆和求解可通过  $(A, B)$  的行最简形一起解决: 即若  $A \sim E$ , 则  $A$  可逆, 并且初等行变换把  $A$  变为  $E$  的同时, 把  $B$  变为  $A^{-1}B$ .

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_1 + r_3 \\ r_2 - 2r_3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是  $A$  可逆, 且  $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ .

(2) 可以仿照教材中的方法, 用初等列变换求  $BA^{-1}$ , 但通常习惯用初等行变换求  $X$ .

因  $XA = B \Rightarrow A^T X^T = B^T \Rightarrow X^T = (A^T)^{-1} B^T$ , 与题(1)相同, 可用初等行变换先求得  $X^T$ , 从而得  $X$ . 计算如下:

$$(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_2+4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1-3r_2 \\ r_3-2r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1-r_3 \\ r_2-r_3 \\ r_3 \times (-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

于是  $X^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , 从而  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ .

6. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $AX = 2X + A$ , 求  $X$ .

解  $AX = 2X + A \Rightarrow (A - 2E)X = A$ . 欲解此方程, 需要(i)判断  $A - 2E$  为可逆矩阵;(ii)进一步求  $X = (A - 2E)^{-1}A$ . 这两件事可由  $(A - 2E, A)$  的行最简形一起解决.

$$(A - 2E, A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \times (-1) \\ r_3 + r_1 \\ r_2 \times (-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 \div (-2) \\ r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

上述结果表明  $A - 2E \sim E$ , 故  $A - 2E$  可逆, 且

$$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. 在秩是  $r$  的矩阵中, 有没有等于 0 的  $r-1$  阶子式? 有没有等于 0 的  $r$  阶子式?

解 在秩是  $r$  的矩阵中等于 0 的  $r-1$  阶子式可能有, 也可能没有; 等于 0 的  $r$  阶子式可能有, 也可能没有. 例如:

(i) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  的秩为 2, 有等于 0 的 1 阶子式(简称 1 阶零子式, 下同), 但没有 2 阶零子式;

(ii) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  的秩为 2, 没有 1 阶零子式, 也没有 2 阶零子式;

(iii) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  的秩为 2, 有 1 阶零子式, 也有 2 阶零子式;

(iv) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  的秩为 2, 没有 1 阶零子式, 但有 2 阶零子式.

8. 从矩阵  $A$  中划去一行得到矩阵  $B$ , 问  $A, B$  的秩的关系怎样?

解 由矩阵秩的性质⑤, 有

$$R(A) - 1 \leq R(B) \leq R(A).$$

9. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解 因  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的秩为 2, 故满足要求的方阵可以是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故它的秩为 2, 并且它的第 1, 2 行和第 1, 2 列构成最高阶非零子式.

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 7r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3, 且它的第 1、2、3 行和第 1、2、5 列构成最高阶非零子式.

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 \leftrightarrow r_4 \\ r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 \div 14 \\ r_4 - 16r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3. 由于 3 个非零行的非零首元位于第 1、2、5 列, 故在第 1、2、5 列

所构成的矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  中寻找 3 阶非零子式. 容易看出

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

11. 设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 证明  $A \sim B$  的充要条件是  $R(A) = R(B)$ .

证 必要性即定理 2, 故只需证明充分性. 设  $R(A) = R(B) = r$ , 那么矩阵  $A, B$  有相同的标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

于是  $A \sim F, B \sim F$ , 从而由等价关系的对称性和传递性, 知  $A \sim B$ .

12. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$ , 问  $k$  为何值, 可使

(1)  $R(A) = 1$ ; (2)  $R(A) = 2$ ; (3)  $R(A) = 3$ .

解一 因  $A$  为 3 阶方阵, 故  $R(A) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ . 因

$$|A| = -6(k-1)^2(k+2),$$

所以当  $k \neq 1$  且  $k \neq -2$  时,  $R(A) = 3$ .

当  $k = -2$  时,  $R(A) \leq 2$ , 又  $A$  的左上角二阶子式不为零, 故  $R(A) \geq 2$ , 于是  $R(A) = 2$ ;

当  $k = 1$  时,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

知  $R(A) = 1$ .

解二 对  $A$  作初等行变换.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - kr_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 2(k-1) & -3(k^2-1) \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2) \end{pmatrix},$$

于是, (1) 当  $k = 1$  时,  $R(A) = 1$ ; (2) 当  $k = -2$  时,  $R(A) = 2$ ; (3) 当  $k \neq 1$  且  $k \neq -2$  时,  $R(A) = 3$ .

13. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵  $A$  进行初等行变换, 化为行最简形.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div (-3)]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

于是  $R(\mathbf{A})=3$ , 故方程组有  $4-R(\mathbf{A})=1$  个自由未知数; 与原方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

取  $x_4$  为自由未知数, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbf{R}).$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+4r_2]{r_2 \div (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取  $x_2$  和  $x_4$  为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & -13 & 8 \\ 0 & 9 & -23 & 26 \\ 0 & 7 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \widetilde{r_3 - r_2} \\ \widetilde{r_4 - r_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & -13 & 8 \\ 0 & 2 & -10 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \widetilde{r_2 \div 2} \\ r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 7r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 22 & -55 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 \div 22 \\ \widetilde{r_1 + 5r_3} \\ r_2 + 5r_3 \\ r_4 - 2r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取  $x_4$  为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{7}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{5}{2}x_4, \end{cases}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \widetilde{r_1 - r_2} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ \widetilde{r_3 - 4r_1} \\ r_4 - 7r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3 - r_2 \\ \widetilde{r_4 - 3r_2} \\ r_2 \div (-17) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 - 7r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取  $x_3$  和  $x_4$  为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

14. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2. \end{cases}$$

解 本题中分别以  $A$  和  $B$  表示方程组的系数矩阵和增广矩阵.

$$(1) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 11r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & -30 & 33 & 96 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

因  $R(A) = 2, R(B) = 3, R(A) \neq R(B)$ , 知方程组无解;

$$(2) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_2 - 2r_1} \\
 \widetilde{r_3 - 3r_1} \\
 \widetilde{r_4 - 4r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -2 & 4 & -5 \\
 0 & 7 & -7 & 14 \\
 0 & 14 & -14 & 28 \\
 0 & 7 & -7 & 14
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_2 \div 7} \\
 \widetilde{r_3 - 14r_2} \\
 \widetilde{r_4 - 7r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -2 & 4 & -5 \\
 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_1 + 2r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & -1 \\
 0 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

因  $R(A) = R(B) = 2 < 3$ , 故方程组有无穷多解, 并且有  $3 - R(A) = 1$  个自由未知数. 选  $z$  为自由未知数, 得到同解方程组:

$$\begin{cases}
 x + 2z = -1, \\
 y - z = 2,
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 x = -2z - 1, \\
 y = z + 2,
 \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix}
 x \\
 y \\
 z
 \end{pmatrix}
 = c \begin{pmatrix}
 -2 \\
 1 \\
 1
 \end{pmatrix}
 + \begin{pmatrix}
 -1 \\
 2 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (c \in \mathbb{R});$$

$$(3) \mathbf{B} = \begin{pmatrix}
 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\
 2 & 1 & -1 & -1 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_2 - 2r_1} \\
 \widetilde{r_3 - r_1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & 0
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \widetilde{r_1 + r_2} \\
 \widetilde{r_3 - 2r_2}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_1 \div 2} \\
 \widetilde{r_2 \times (-1)}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix},$$

选  $y, z$  为自由未知数, 得到同解方程组

$$\begin{cases}
 x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\
 w = 0,
 \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix}
 x \\
 y \\
 z \\
 w
 \end{pmatrix}
 = c_1 \begin{pmatrix}
 -\frac{1}{2} \\
 1 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 + c_2 \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \\
 0 \\
 1 \\
 0
 \end{pmatrix}
 + \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R});$$

$$(4) \mathbf{B} = \begin{pmatrix}
 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\
 1 & 4 & -3 & 5 & -2
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \widetilde{r_1 \leftrightarrow r_3}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\
 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\
 2 & 1 & -1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -14 & 10 & -18 & 10 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 - \frac{1}{2}r_2 \\ r_2 \div (-14) \end{array} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \\ \begin{array}{l} r_1 - 4r_2 \end{array} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

选  $z, w$  为自由未知数, 得同解方程组:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \end{cases}$$

即得 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

15. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

为通解的齐次线性方程组.

解 把(3.3)式改写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ -3c_1 + 4c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{以 } c_1 = x_3, \\ c_2 = x_4 \text{ 代入}}]{\quad} \begin{pmatrix} 2x_3 - 2x_4 \\ -3x_3 + 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

由此知所求方程组有 2 个自由未知数  $x_3, x_4$ , 且对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

它以(3.3)式为通解.

注 (1) 有无限多个齐次方程组以(3.3)式为通解表示式, 这里给出比较简

单的一个,即系数矩阵为行最简形.

(2) 本题与习题四题 22 相仿,是同一问题的两种提法.

16.  $\lambda$  取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无穷多解?

解 仿照教材例 13,本题也有两种解法,且以行列式解法较为简单,故这里只用此法解之.

系数矩阵  $A$  的行列式为(可参看习题一题 8(2))

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1 \div (\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

当  $|A| \neq 0$  时,即当  $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$  时,  $R(A) = 3$ ,方程组有惟一解;

当  $\lambda = 1$  时,增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见,  $R(A) = R(B) = 1 < 3$ ,于是方程组有无穷多解;

当  $\lambda = -2$  时,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

可见  $R(A) = 2, R(B) = 3, R(A) \neq R(B)$ ,于是方程组无解.

17. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当  $\lambda$  取何值时有解? 并求出它的通解.

解 这里系数矩阵  $A$  是方阵,但  $A$  中不含参数,故以对增广矩阵作初等行变换为宜,求解如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 + 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2 + 2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \div (-3) \\ r_3 + 3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

因  $R(\mathbf{A})=2$ , 故当  $R(\mathbf{B})=2$ , 即当  $\lambda=1$  或  $\lambda=-2$  时, 方程组有解.

当  $\lambda=1$  时,

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

选  $x_3$  为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 1, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$$

得通解 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbf{R});$$

当  $\lambda=-2$  时,

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

选  $x_3$  为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2, \\ x_2 = x_3 + 2, \end{cases}$$

即 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbf{R}).$$

18. 设

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -(\lambda+1), \end{cases}$$

问  $\lambda$  为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解 由于系数矩阵是方阵,其行列式

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+r_2 \\ c_3+c_2}]{} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_2} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 5-\lambda & \lambda-9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10),
 \end{aligned}$$

当  $|A| \neq 0$ , 即  $\lambda \neq 1$  且  $\lambda \neq 10$  时, 方程组有惟一解.

当  $\lambda = 10$  时, 增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3+r_1 \\ r_2+4r_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -18 & -18 & 9 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可见  $R(A) = 2, R(B) = 3, R(A) \neq R(B)$ , 方程组无解;

当  $\lambda = 1$  时, 增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知  $R(A) = R(B) = 1$ , 方程组有无穷多解, 且其通解为

$$x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

19. 证明  $R(A) = 1$  的充分必要条件是存在非零列向量  $a$  和非零行向量  $b^T$ , 使  $A = ab^T$ .

证 先证充分性. 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 并不妨设  $a_1, b_1 \neq 0$ .

按矩阵秩的性质⑦, 由  $A = ab^T$  有  $R(A) \leq R(a) = 1$ ; 另一方面,  $A$  的  $(1,1)$  元  $a_1 b_1 \neq 0$ , 知  $R(A) \geq 1$ . 于是  $R(A) = 1$ .

再证必要性. 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}, R(A) = 1$ , 并不妨设  $a_{kl} \neq 0$ .

因  $R(A) = 1$ , 知  $A$  的所有二阶子式均为零, 故对  $A$  的任一元  $a_{ij} (i \neq k, j \neq l)$  有

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } a_{kl} a_{ij} = a_{il} a_{kj}.$$

上式当  $i = k$  或  $j = l$  时也显然成立. 于是

$$\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix} (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = (a_{ij} a_{kj})_{m \times n} = (a_{kl} a_{ij})_{m \times n} = a_{kl} A.$$

令  $a = \frac{1}{a_{kl}} \begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix}$ ,  $b^T = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ , 则因  $a_{kl} \neq 0$ , 故  $a, b^T$  分别是非零

列向量和非零行向量, 且有  $A = ab^T$ .

20. 设  $A$  为列满秩矩阵,  $AB = C$ , 证明方程  $Bx = 0$  与  $Cx = 0$  同解.

证 若  $x$  满足  $Bx = 0$ , 则  $ABx = 0$ , 即  $Cx = 0$ .

若  $x$  满足  $Cx = 0$ , 即  $ABx = 0$ , 因  $A$  为列满秩矩阵, 由定理 4 知方程  $Ay = 0$  只有零解, 故  $Bx = 0$ .

综上即知方程  $Bx = 0$  与  $Cx = 0$  同解.

21. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明方程  $AX = E_m$  有解的充分必要条件是  $R(A) = m$ .

证 按定理 6 知, 方程  $AX = E_m$  有解  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, E_m)$ , 而  $(A, E_m)$  含  $m$  行, 有  $R(A, E_m) \leq m$ ; 又  $R(A, E_m) \geq R(E_m) = m$ , 因此  $R(A, E_m) = m$ . 所以

方程  $AX = E_m$  有解  $\Leftrightarrow R(A) = m$ .

## 习题解答

1. 已知向量组

$$A: a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; B: b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

证明  $B$  组能由  $A$  组线性表示, 但  $A$  组不能由  $B$  组线性表示.

证  $B$  组能由  $A$  组线性表示  $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$ ;

$A$  组不能由  $B$  组线性表示  $\Leftrightarrow R(B, A) > R(B)$ ;

于是,  $B$  组能由  $A$  组线性表示, 且  $A$  组不能由  $B$  组线性表示  $\Leftrightarrow R(B, A) = R(A) > R(B)$ . 具体计算如下:

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是  $R(\mathbf{B})=2, R(\mathbf{B}, \mathbf{A})=3$ , 并且上式右端矩阵的后三列所构成矩阵与矩阵  $\mathbf{A}$  行等价, 继续对它作初等行变换, 得

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以  $R(\mathbf{A})=3$ . 合起来有  $R(\mathbf{B}, \mathbf{A})=R(\mathbf{A})=3 > R(\mathbf{B})=2$ .

## 2. 已知向量组

$$\mathbf{A}: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B}: \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

证明  $\mathbf{A}$  组与  $\mathbf{B}$  组等价.

证 记矩阵  $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \mathbf{B}=(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ . 因  $\mathbf{A}$  组与  $\mathbf{B}$  组等价  $\Leftrightarrow R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})=R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  (或  $R(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ ), 故求矩阵  $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$  的行阶梯形以计算 3 个矩阵的秩.

$$(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即知  $R(\mathbf{B})=R(\mathbf{B}, \mathbf{A})=2$ , 且  $R(\mathbf{A}) \leq 2$ . 又  $\mathbf{a}_1$  与  $\mathbf{a}_2$  不成比例, 故  $R(\mathbf{A})=2$ .

因此, 向量组  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  等价.

## 3. 已知 $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)=2, R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)=3$ , 证明

- (1)  $\mathbf{a}_1$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示;
- (2)  $\mathbf{a}_4$  不能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示.

证一 (1) 由  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \geq R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) - 1 = 3 - 1 = 2$ , 知  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$ . 又已知  $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$ , 故  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , 由定理 1 知  $\mathbf{a}_1$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示;

(2)  $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \geq R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3 > R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , 由定理 1 知  $\mathbf{a}_4$  不能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示.

证二 (1)  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3 \Rightarrow$  向量组  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关  $\Rightarrow \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关 (整体无关则部分无关); 又,

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2 < 3 \Rightarrow \text{向量组 } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ 线性相关.}$$

于是, 由定理 5,  $\mathbf{a}_1$  必能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  (唯一地) 线性表示.

(2) 反证法: 若  $\mathbf{a}_4$  能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示, 而由 (1),  $\mathbf{a}_1$  可由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示. 这样,  $\mathbf{a}_4$  也就能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示, 从而可知  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性相关. 于是  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) < 3$ , 此与  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$  相矛盾.

## 4. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解 记 (1)、(2) 中向量所构成的矩阵为  $\mathbf{A}$ .

$$(1) \det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow R(A) < 3 =$  向量的个数

$\Rightarrow$  向量组(1)线性相关(由定理 4);

$$(2) \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

$\Rightarrow R(A) = 3 =$  向量的个数

$\Rightarrow$  向量组(2)线性无关 (由定理 4).

5. 问  $a$  取什么值时下列向量组线性相关?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

解 记  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , 则

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2).$$

于是当  $a = -1$  或  $a = 2$  时,  $\det A = 0$ , 即  $R(A) < 3$ . 由定理 4 知此时向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性相关.

6. 设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相关, 求向量  $\mathbf{b}$  用  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性表示的表示式.

解一 因  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相关, 故存在不全为零的常数  $k_1, k_2$ , 使

$$k_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) + k_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow (k_1 + k_2)\mathbf{b} = -k_1\mathbf{a}_1 - k_2\mathbf{a}_2.$$

因  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关, 故  $k_1 + k_2 \neq 0$ , 不然, 由上式得

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0,$$

这与  $k_1, k_2$  不全为零矛盾. 于是由(4.5)式, 得

$$\mathbf{b} = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}\mathbf{a}_1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2}\mathbf{a}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_1 + k_2 \neq 0.$$

解二 因  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相关, 故  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) - (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}), \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相

关,即  $a_1 - a_2, a_2 + b$  线性相关. 又因  $a_1, a_2$  线性无关,故  $a_1 - a_2 \neq 0$ ,于是存在  $\lambda$  使

$$\begin{aligned} a_2 + b &= \lambda(a_1 - a_2) \\ \Rightarrow b &= \lambda a_1 - (\lambda + 1)a_2, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

这与解一的结果相同.

7. 设  $a_1, a_2$  线性相关,  $b_1, b_2$  也线性相关,问  $a_1 + b_1, a_2 + b_2$  是否一定线性相关? 试举例说明之.

解 向量组  $a_1 + b_1, a_2 + b_2$  不一定线性相关. 例如令

$$\text{向量组 I: } a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{向量组 II: } b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则这两向量组均线性相关,但向量组  $a_1 + b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 + b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  线性无关.

8. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关,则  $a_1$  可由  $a_2, \dots, a_m$  线性表示.

(2) 若有不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

成立,则  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  亦线性相关.

(3) 若只有当  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  全为零时,等式

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

才能成立,则  $a_1, \dots, a_m$  线性无关,  $b_1, \dots, b_m$  亦线性无关.

(4) 若  $a_1, \dots, a_m$  线性相关,  $b_1, \dots, b_m$  亦线性相关,则有不全为零的数  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 使

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0; \quad \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

同时成立.

答 命题(1)是错误的,反例:取向量  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 则向量组  $a_1, a_2$  线性相关,因它含有零向量,但  $a_1$  并不能由  $a_2$  线性表示.

注 向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示,但并不指明是哪一个向量,更不是说任一个向量可由其余向量线性表示.

命题(2)是错误的,反例:取  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;再取  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , 则有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$$

成立,但  $a_1, a_2$  线性无关,  $b_1, b_2$  也线性无关.

注 关系式  $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$  ( $\lambda_i$  不全为 0) 只能说明向量组  $a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m$  线性相关.

命题(3)是错误的,反例:取  $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,此时若有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0$$

成立,只有  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,但向量组  $a_1, a_2$  和向量组  $b_1, b_2$  都线性相关.

注 题设条件只能说明  $a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m$  线性无关.

命题(4)是错误的,反例:取  $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,则向量组  $a_1, a_2$  和向量组  $b_1, b_2$  均线性相关.但对此两向量组不存在不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2$ ,使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$$

同时成立,因由上面第一式可得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是,  $\lambda_2 = 0$ ,同理由第二式得  $\lambda_1 = 0$ .

注 题设条件是齐次方程  $(a_1, \cdots, a_m)x = 0$  及  $(b_1, \cdots, b_m)x = 0$  都有非零解,而结论则是这两个齐次方程有公共的非零解.

9. 设  $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$ ,证明向量组  $b_1, b_2, b_3, b_4$  线性相关.

证一  $b_1 - b_2 + b_3 - b_4$

$$= (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - (a_4 + a_1) = 0.$$

由定义,知向量组  $b_1, b_2, b_3, b_4$  线性相关.

证二 两向量组线性表示的矩阵形式为:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)K,$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因  $\det K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } r_1 \text{ 展开}} 1 - 1 = 0, \text{ 故 } R(K) < 4.$

由矩阵秩的性质 7 知

$$R(b_1, b_2, b_3, b_4) \leq R(K) < 4,$$

由定理 4, 向量组  $b_1, b_2, b_3, b_4$  线性相关.

注 从证明可见, 不管  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是否线性相关,  $b_1, b_2, b_3, b_4$  总是线性相关的(参看例 4.1).

10. 设  $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r$ , 且向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 证明向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关.

证 先把向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性表示的关系式写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, \dots, b_r) &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_r) K. \end{aligned}$$

因  $\det K = 1$ , 故  $K$  是可逆阵, 由矩阵秩的性质 4, 知

$$R(b_1, b_2, \dots, b_r) = R(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

又因  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 由定理 4 知  $R(a_1, a_2, \dots, a_r) = r$ , 从而有  $R(b_1, b_2, \dots, b_r) = r$ . 再次运用定理 4 知向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关.

11. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

$$(1) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(2) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 对  $A = (a_1, a_2, a_3)$  作初等行变换, 求它的行阶梯形:

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 4r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_r \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可知  $R(a_1, a_2, a_3) = 2$ , 并且  $a_1, a_2$  是它的一个最大无关组.

$$(2) A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim_r \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知  $R(a_1, a_2, a_3) = 2$ , 并且  $a_1, a_2$  是它的一个最大无关组.

12. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 记  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_4 - r_1 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - 3r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_4 - r_2 \\ r_4 - r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 - 17r_3 \\ r_2 - 2r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 - 31r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \div 25 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从  $A$  的行最简形可知:  $a_1, a_2, a_3$  是  $A$  的列向量组的一个最大无关组; 而

$$a_4 = \frac{8}{5}a_1 - a_2 + 2a_3.$$

(2) 记  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 + r_2, r_4 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

从上面  $A$  的行最简形可知:  $a_1, a_2, a_3$  是  $A$  的列向量组的一个最大无关线; 而

$$a_4 = a_1 + 3a_2 - a_3, \quad a_5 = -a_2 + a_3.$$

13. 设向量组

$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求  $a, b$ .

解 对含参数  $a$  和  $b$  的矩阵  $(a_3, a_4, a_1, a_2)$  作初等行变换, 以求其行阶梯形.

$$\begin{aligned}
 (a_3, a_4, a_1, a_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 - 2a & b - 4 \\ 0 & -1 & 1 - a & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 - 2a & b - 4 \\ 0 & 0 & a - 2 & 5 - b \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 R(a_1, a_2, a_3, a_4) &= 2 \\
 \Leftrightarrow R(a_3, a_4, a_1, a_2) &= 2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ 且 } b = 5.
 \end{aligned}$$

注 把含参数的列放在不含参数的列后面, 常可简化计算.

14. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是一组  $n$  维向量, 已知  $n$  维单位坐标向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$  能由它们线性表示, 证明  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

证  $e_1, e_2, \dots, e_n$  可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示

$\Rightarrow n = R(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq R(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n$  (由定理 3)

$\Rightarrow R(a_1, a_2, \dots, a_n) = n$

$\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关 (由定理 4).

15. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是一组  $n$  维向量, 证明它们线性无关的充要条件是: 任一  $n$  维向量都可由它线性表示.

证 必要性: 任给  $n$  维向量  $b$ , 则  $n$  维向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  线性相关 (因它所含向量个数大于向量的维数). 又因  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关, 由定理 5(3), 可知向量  $b$  必可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (惟一地) 线性表示.

充分性: 设任一  $n$  维向量能由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示, 特别,  $n$  维单位坐标向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$  能由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示, 由习题 14 知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

16. 设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关, 且  $a_1 \neq 0$ , 证明存在某个向量  $a_k$  ( $2 \leq k \leq m$ ), 使  $a_k$  能由  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  线性表示.

证一 因为向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关, 由定义知, 存在不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0. \quad (4.6)$$

按足标从大到小考察上式中系数  $\lambda_i$ . 设其第一个不为零的数为  $\lambda_k$ , 也即  $\lambda_k \neq 0$ , 但  $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_m = 0$ . 此足标  $k \geq 2$ . 如若不然, 该式成为  $\lambda_1 a_1 = 0$ . 由  $a_1 \neq 0$  知  $\lambda_1 = 0$ , 这与这些系数不全为零矛盾. 这时 (4.6) 式成为

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0, \text{ 且 } \lambda_k \neq 0, k \geq 2$$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} a_{k-1},$$

于是上述向量  $a_k$  即满足要求.

证二 记  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ . 由题设,  $A$  的列向量组线性相关, 故  $R(A) < m$ . 设  $\tilde{A}$  是  $A$  的行阶梯形, 则  $\tilde{A}$  中一定存在不含非零首元的列  $\tilde{a}_k$ . 注意到  $\tilde{A}$  的第 1 列是含非零首元的, 故  $k \geq 2$ . 因  $\tilde{a}_k$  能由  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{k-1}$  线性表示, 故  $A$  中对应的  $a_k$  也能由  $a_1, \dots, a_{k-1}$  线性表示.

17. 设向量组  $B: b_1, b_2, \dots, b_r$  能由向量组  $A: a_1, a_2, \dots, a_s$  线性表示为

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s) K,$$

其中  $K$  为  $s \times r$  矩阵, 且  $A$  组线性无关. 证明  $B$  组线性无关的充要条件是矩阵

$K$  的秩  $R(K) = r$ .

证一 记  $A = (a_1, a_2, \dots, a_s), B = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ , 则有

$$B = AK. \quad (4.7)$$

必要性: 设向量组  $B$  线性无关, 知  $R(B) = r$ . 又由  $B = AK$ , 知  $R(K) \geq R(B)$ . 但  $K$  含  $r$  列, 有  $R(K) \leq r$ , 于是

$$r = R(B) \leq R(K) \leq r, \text{ 即 } R(K) = r.$$

充分性: 设  $R(K) = r$ . 要证  $B$  组线性无关. 由于

$$\begin{aligned} Bx = 0 &\Leftrightarrow AKx = 0 \\ &\Rightarrow Kx = 0 \quad (\text{因 } R(A) = s, \text{ 根据上章定理 4}) \\ &\Rightarrow x = 0 \quad (\text{因 } R(K) = r, \text{ 根据上章定理 4}), \end{aligned}$$

因此, 向量组  $B$  线性无关.

证二 由(4.7)式, 因  $R(A) = s, A$  为列满秩矩阵, 根据上章例 9 知  $R(B) = R(K)$ . 于是

$$B \text{ 组线性无关} \Leftrightarrow R(B) = r \Leftrightarrow R(K) = r.$$

18. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  等价.

证 列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  依次构成矩阵  $A$  和  $B$ , 于是有

$$B = AK, \quad (4.8)$$

其中系数矩阵  $K$  为

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其行列式  $|K| = (n-1)(-1)^{n-1} \neq 0$  ( $n \geq 2$ ) (见第一章习题 8(2)), 故  $K$  可逆. 由(4.8)式即得  $A = BK^{-1}$ , 此表明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  能由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表示 (其表示的系数矩阵为  $K^{-1}$ ), 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  等价.

注 当  $|K| = 0$  时, 不能得出  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  不等价的结论.

19. 已知 3 阶矩阵  $A$  与 3 维列向量  $x$  满足  $A^3 x = 3Ax - A^2 x$ , 且向量组  $x, Ax, A^2 x$  线性无关.

(1) 记  $y = Ax, z = Ay, P = (x, y, z)$ , 求三阶矩阵  $B$ , 使  $AP = PB$ ;

(2) 求  $|A|$ .

解 (1) 因矩阵  $P$  的列向量组线性无关, 故  $P$  可逆, 从而  $B = P^{-1}AP$ . 本题的困难在于没有具体给出  $A$  和  $P$  的元素, 而是它们之间的一些关系式. 下面就利用这些关系式来计算  $B$ .

$$AP = A(x, y, z) = (Ax, Ay, Az).$$

因  $Ax = y, Ay = z, Az = A^3x = 3Ax - A^2x = 3y - z$ , 故

$$AP = (y, z, 3y - z) \\ = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

于是 
$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(其实, 矩阵  $B$  就是向量组  $Ax, Ay, Az$  由向量组  $x, y, z$  线性表示的系数矩阵).

(2) 由  $B = P^{-1}AP$ , 两边取行列式, 便有  $|A| = |B| = 0$ .

20. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$$

解 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} r_2 \div (-5) \\ r_3 + 8r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 - 2r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可知原方程的同解方程为

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0, \\ -4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_4 = 4x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

分别取  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 14 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} -19 & 0 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得同解方程

$$\begin{cases} -19x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7x_1, \\ x_4 = 19x_1 + 2x_3. \end{cases}$$

分别取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

注 解本题时, 矩阵的初等行变换与第三章中的比较, 已有了一些变化, 要求概念掌握得更加清晰, 初等变换运用得更加娴熟.

(3)  $\mathbf{A} = (n, n-1, \dots, 1)$ , 可见  $R(\mathbf{A}) = 1$ , 从而有  $n - R(\mathbf{A}) = n - 1$  个线性无关的解构成此方程的基础解系, 并且由

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \dots - 2x_{n-1},$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

代入上式就得到基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -n \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -(n-1) \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

21. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ , 求一个  $4 \times 2$  矩阵  $B$ , 使  $AB = O$ , 且  $R(B) = 2$ .

解 设  $B$  按列分块为  $B = (b_1, b_2)$ . 因  $R(B) = 2$ , 故  $b_1, b_2$  线性无关.

又因  $AB = O \Rightarrow A(b_1, b_2) = (0, 0) \Rightarrow Ab_1 = 0$  且  $Ab_2 = 0 \Rightarrow b_1, b_2$  是方程

$$Ax = 0 \quad (4.9)$$

的解; 并且这方程的系数矩阵  $A$  的秩  $R(A) = 2$ . 于是可知  $b_1, b_2$  是它的一个基础解系.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_4, \\ x_3 = 8x_1 + x_4, \end{cases}$$

分别取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得此方程的一个基础解系为

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, 令

$$B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

就满足题目的要求.

22. 求一个齐次线性方程, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解 设所求齐次线性方程为

$$Ax = 0.$$

首先考虑此方程有多少个未知数? 有多少个方程? 因  $\xi_1$  是 4 维的, 故方程有 4 个未知数, 即矩阵  $A$  的列数等于 4. 另一方面, 因基础解系含 2 个向量, 故由定理 7 知  $R(A) = 4 - 2 = 2$ , 因此方程的个数  $m \geq 2$  个. 这样, 我们只需构造一个满足题设要求而行数最少的矩阵  $A$ , 也即  $A$  取  $2 \times 4$  矩阵, 且  $R(A) = 2$ .

记  $B = (\xi_1, \xi_2)$ , 那么

$\xi_1, \xi_2$  是方程  $Ax = 0$  的基础解系

$$\Leftrightarrow AB = O, \text{ 且 } R(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow B^T A^T = O, \text{ 且 } R(A^T) = 2.$$

$$\Leftrightarrow A^T \text{ 的两个列向量是 } B^T x = 0 \text{ 的一个基础解系 (因 } R(B) = 2).$$

$$\text{由 } B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (2, -3, 0, 1)^T,$$

故  $A$  可取为

$$A = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

23. 设四元齐次方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

求(1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解 (1) 求方程组 I 的基础解系: 系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其基础解系可取为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

求方程组 II 的基础解系: 系数矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 故可取其基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  为 I 与 II 的公共解, 下面用两种方法求  $x$  的一

般表达式.

方法一  $x$  是 I 与 II 的公共解  $\Leftrightarrow x$  是方程组 III 的解, 这里方程组 III 为 I 与 II 合起来的方程组, 即

$$\text{III: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取其基础解系为  $(-1, 1, 2, 1)^T$ , 于是 I 与 II 的公共解为

$$x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

方法二 以 I 的通解  $x = (-c_1, c_1, c_2, c_1)^T$  代入 II 得

$$\begin{cases} -c_1 - c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 + c_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2c_1.$$

这表明 I 的解中所有形如  $(-c_1, c_1, 2c_1, c_1)^T$  的解也是 II 的解, 从而是 I 和 II 的公共解. 于是 I 和 II 的公共解为

$$x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

24. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ ,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 证明

$$R(A) + R(A - E) = n.$$

提示: 利用矩阵秩的性质⑥和⑧.

证

$$A^2 = A$$

$$\Rightarrow A(A - E) = O$$

$$\Rightarrow R(A) + R(A - E) \leq n \quad (\text{矩阵秩的性质⑧}).$$

另一方面, 由矩阵秩的性质⑥, 知

$$R(A) + R(E - A) \geq R(A + (E - A)) = R(E) = n,$$

因  $R(E - A) = R(A - E)$ , 故由以上两个不等式知,  $R(A) + R(A - E) = n$ .

25. 设  $A$  为  $n$  阶 ( $n \geq 2$ ) 矩阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 证明

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(A) = n, \\ 1, & \text{当 } R(A) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } R(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

证 (1) 当  $R(A) = n$  时,  $|A| \neq 0$ . 由习题二题 24, 得

$$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0,$$

从而

$$R(A^*) = n;$$

(2) 当  $R(A) \leq n - 2$  时, 由矩阵秩的定义知  $A$  的所有  $n - 1$  阶子式即  $A^*$  的任一元素均为零, 即  $A^* = O$ , 从而  $R(A^*) = 0$ ;

(3) 当  $R(A) = n - 1$  时, 由矩阵秩的定义,  $A$  中至少有一个  $n - 1$  阶子式不为零, 也即  $A^*$  中至少有一个元素不为零, 故  $R(A^*) \geq 1$ .

另一方面, 因  $R(A) = n - 1$ , 有  $|A| = 0$ . 由  $AA^* = |A|E$  知,

$$AA^* = O.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(A) + R(A^*) \leq n,$$

把  $R(A) = n - 1$  代入上式, 得  $R(A^*) \leq 1$ . 综合以上两个关于  $R(A^*)$  的不等式, 便有  $R(A^*) = 1$ .

注 本题的结论很有用, 值得记取.

26. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

解 (1) 增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 2r_3]{r_3 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

据此, 得原方程组的同解方程

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8, \\ x_2 = x_3 + 13, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

取  $x_3 = 0$  得特解  $\eta = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; 取  $x_3 = 1$  得对应齐次方程基础解系  $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(2) 增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 5r_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \\ 0 & 14 & -2 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_2 \div (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & -7 & 1 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = -17, \\ -7x_2 + x_3 - \frac{7}{2}x_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_4 - 17, \\ x_3 = 7x_2 + \frac{7}{2}x_4 + 14. \end{cases}$$

令  $x_2 = x_4 = 0$  得特解  $\eta = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 分别令  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得对应齐次方

程的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

27. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是它的三个解向量, 且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

解 记该非齐次方程组为  $Ax = b$ , 对应齐次方程为  $Ax = 0$ .

因  $R(A) = 3$ , 由定理 7 知此齐次方程的基础解系由 1 个非零解构成, 也即它的任一非零解都是它的基础解系. 另一方面, 记向量  $\xi = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3)$ , 则

$$\begin{aligned} A\xi &= A(2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3) \\ &= 2A\eta_1 - A\eta_2 - A\eta_3 = 2b - b - b = 0, \end{aligned}$$

且直接计算得  $\xi = (3, 4, 5, 6)^T \neq 0$ . 这样,  $\xi$  就是它的一个基础解系. 根据非齐次方程组解的结构知, 原方程组的通解为

$$x = k\xi + \eta_1 = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

28. 设有向量组  $A: a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  及向量  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

问  $\alpha, \beta$  为何值时

- (1) 向量  $b$  不能由向量组  $A$  线性表示;
- (2) 向量  $b$  能由向量组  $A$  线性表示, 且表示式惟一;
- (3) 向量  $b$  能由向量组  $A$  线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解 记矩阵  $A = (a_1, a_2, a_3)$ , 那么方程

$$Ax = b \tag{4.10}$$

有解  $\Leftrightarrow b$  可由向量组  $A$  线性表示, 因而本题可以归结为含参数的非齐次线性方程的求解(可参看第三章相关习题).

(1) 当方程(4.10)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 即 } \alpha \neq -4 \text{ 时}$$

方程(4.10)有惟一解, 从而向量  $b$  能由向量组  $A$  线性表示, 且表示式惟一;

(2) 当  $\alpha = -4$  时, 增广矩阵

$$\begin{aligned} (A, b) &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 0 & 0 & -1 & -1 - 5\beta \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1 - r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 - \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是当  $\beta \neq 0$  时, 方程(4.10)无解, 从而向量  $b$  不能由向量组  $A$  线性表示; 当

$\beta=0$ 时,

$$(A, b) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(A) = R(A, b) = 2 < 3$ , 方程(4.10)有无穷多解, 从而向量  $b$  可由向量组  $A$  线性表示, 且表示式不惟一.

(3) 因方程(4.10)的通解为

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

故  $b$  由向量组  $A$  线性表示的一般表示式为

$$\begin{aligned} b &= Ax = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ca_1 - (2c+1)a_2 + a_3, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

29. 设

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ l_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i=1,2,3)$$

相交于一点的充要条件为向量组  $a, b$  线性无关, 且向量组  $a, b, c$  线性相关.

证

三直线  $l_1, l_2, l_3$  相交于一点

$$\Leftrightarrow \text{非齐次方程 } (a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -c \text{ 有惟一解}$$

$$\Leftrightarrow R(a, b) = R(a, b, c) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{向量组 } a, b \text{ 线性无关, 且向量组 } a, b, c \text{ 线性相关.}$$

30. 设矩阵  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ , 其中  $a_2, a_3, a_4$  线性无关,  $a_1 = 2a_2 - a_3$ . 向量  $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 求方程  $Ax = b$  的通解.

解 显然, 这是一个四元方程. 先决定系数矩阵  $A$  的秩. 因  $a_2, a_3, a_4$  线性无关, 故  $R(A) \geq 3$ . 又

$a_1$  能由  $a_2, a_3$  线性表示

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$  线性相关

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4$  线性相关(部分相关则整体相关)

$\Rightarrow R(A) \leq 3$ .

综合上面两个不等式,有  $R(A) = 3$ ,从而原方程的基础解系所含向量个数为  $4 - 3 = 1$ . 进一步,

$$a_1 = 2a_2 - a_3 \Leftrightarrow a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$$

$\Leftrightarrow x = (1, -2, 1, 0)^T$  是方程  $Ax = 0$  的解

$\Rightarrow x = (1, -2, 1, 0)^T$  是它的基础解系,

又

$$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$\Leftrightarrow x = (1, 1, 1, 1)^T$  是方程  $Ax = b$  的解,

于是由非齐次线性方程解的结构,原方程的通解为

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

31. 设  $\eta^*$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一个解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是对应的齐次线性方程组的一个基础解系,证明

(1)  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关;

(2)  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性无关.

证 (1) 设有关系式

$$k_0 \eta^* + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} = 0, \quad (4.11)$$

用矩阵  $A$  左乘上式两边,并注意题设条件,得

$$\begin{aligned} 0 &= A(k_0 \eta^* + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}) \\ &= k_0 A\eta^* + k_1 A\xi_1 + \dots + k_{n-r} A\xi_{n-r} = k_0 b, \end{aligned}$$

但  $b \neq 0$ ,由上式知  $k_0 = 0$ ,于是,(4.11)式成为

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} = 0.$$

因向量组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是对应齐次方程的基础解系,从而线性无关,于是  $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0$ ,由定义知  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.

(2) 设有关系式

$$\lambda_0 \eta^* + \lambda_1 (\eta^* + \xi_1) + \dots + \lambda_{n-r} (\eta^* + \xi_{n-r}) = 0,$$

也即  $(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}) \eta^* + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} = 0$ .

由(1),向量组  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关,故  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$  并且  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 0$ ,于是,  $\lambda_0$  也等于 0,故所给向量组线性无关.

**注** 显然,因  $A(\eta^* + \xi_i) = A\eta^* + A\xi_i = b$ , 故  $\eta^* + \xi_i$  是原方程  $Ax = b$  的解. 于是本题的意义在于: 若有解的非齐次线性方程的系数矩阵的秩为  $r$ , 则它有  $n - r + 1$  个线性无关的解. 而习题 33 则进一步揭示它恰好有  $n - r + 1$  个线性无关的解, 并且它的任一解都可由它们线性表示.

32. 设  $\eta_1, \dots, \eta_s$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的  $s$  个解,  $k_1, \dots, k_s$  为实数, 满足  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ . 证明

$$x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s$$

也是它的解.

$$\begin{aligned} \text{证 因 } Ax &= A(k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s) \\ &= k_1 (A\eta_1) + k_2 (A\eta_2) + \dots + k_s (A\eta_s) \\ &= k_1 b + k_2 b + \dots + k_s b = (k_1 + k_2 + \dots + k_s) b = b, \end{aligned}$$

故  $x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s$  也是方程  $Ax = b$  的解.

33. 设非齐次线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵的秩为  $r$ , 向量  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$  是它的  $n - r + 1$  个线性无关的解(见 31 题之注). 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1} \quad (\text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1).$$

**证** 首先, 由 32 题可知, 上式向量  $x$  满足所给方程.

另一方面, 设向量  $\beta$  是原方程的任一解, 记向量  $\xi_i = \eta_i - \eta_{n-r+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - r$ , 则  $\xi_i$  是对应齐次方程的解, 且向量组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关(其理由与习题 31 的证明完全类似, 读者可作为练习), 于是, 它就是对应齐次方程的一个基础解系. 这样, 向量  $\beta$  就可由此基础解系和原方程的特解  $\eta_{n-r+1}$  线性表示, 即存在数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$ , 使

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} + \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 (\eta_1 - \eta_{n-r+1}) + \dots + \lambda_{n-r} (\eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}) + \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-r}) \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} + \lambda_{n-r+1} \eta_{n-r+1}, \end{aligned}$$

上式中,  $\lambda_{n-r+1} \stackrel{\Delta}{=} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-r}$ , 即  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-r+1} = 1$ .

**注** 此题事实上给出了非齐次线性方程组的通解的另一表达式.

34. 设  $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ ,

$$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 1\},$$

问  $V_1, V_2$  是不是向量空间? 为什么?

**解** (1)  $V_1$  是向量空间, 理由是

(i)  $V_1$  非空:  $(0, 0, \dots, 0)^T \in V_1$ ;

(ii)  $V_1$  对于向量的加法和数乘封闭. 事实上,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in V_1,$$

则有  $(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T, \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)^T$ .

$$\text{因} \quad \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k = 0 + 0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^n x_k = \lambda \cdot 0 = 0,$$

故  $x + y \in V_1, \lambda x \in V_1$ .

(2)  $V_2$  不是向量空间.事实上,取

$$a = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad b = (0, 1, \dots, 0)^T \in V_2,$$

那么  $a + b = (1, 1, \dots, 0)^T \notin V_2$ , 即  $V_2$  对向量加法不封闭.

35. 试证:由  $a_1 = (0, 1, 1)^T, a_2 = (1, 0, 1)^T, a_3 = (1, 1, 0)^T$  所生成的向量空间就是  $\mathbb{R}^3$ .

证 所生成的向量空间记作  $L$ , 显然  $L \subset \mathbb{R}^3$ . 另一方面,  $\forall b \in \mathbb{R}^3$ , 则因  $\det(a_1, a_2, a_3) = 2 \neq 0$ , 故  $a_1, a_2, a_3$  线性无关. 但由定理 5, 向量组  $a_1, a_2, a_3, b$  线性相关, 于是  $b$  可由  $a_1, a_2, a_3$  线性表示, 也即  $b \in L$ . 所以  $\mathbb{R}^3 \subset L$ . 综上知  $L = \mathbb{R}^3$ .

36. 由  $a_1 = (1, 1, 0, 0)^T, a_2 = (1, 0, 1, 1)^T$  所生成的向量空间记作  $L_1$ , 由  $b_1 = (2, -1, 3, 3)^T, b_2 = (0, 1, -1, -1)^T$  所生成的向量空间记作  $L_2$ , 试证  $L_1 = L_2$ .

证 因对应分量不成比例, 故  $a_1, a_2$  线性无关,  $b_1, b_2$  也线性无关. 又因

$$(a_1, a_2, b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 + r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是  $R(a_1, a_2) = R(b_1, b_2) = R(a_1, a_2, b_1, b_2) = 2$ , 由定理 2 之推论, 知向量组  $a_1, a_2$  与  $b_1, b_2$  等价, 从而

$$L_1 = L_2.$$

37. 验证  $a_1 = (1, -1, 0)^T, a_2 = (2, 1, 3)^T, a_3 = (3, 1, 2)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一个基, 并把  $v_1 = (5, 0, 7)^T, v_2 = (-9, -8, -13)^T$  用这个基线性表示.

解 本题本质上就是例 11 及习题 12. 只不过是以前向量空间的语言来叙述. 因

$$(a_1, a_2, a_3, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 + r_1 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

第五章 相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

解 根据施密特正交化方法,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 根据施密特正交化方法,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix};$$

解 此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设  $x$  为  $n$  维列向量,  $x^T x = 1$ , 令  $H = E - 2xx^T$ , 证明  $H$  是对称的正交阵.

证明 因为

$$\begin{aligned} H^T &= (E - 2xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T \\ &= E - 2(x^T)^T x^T = E - 2xx^T, \end{aligned}$$

所以  $H$  是对称矩阵.

因为

$$\begin{aligned} H^T H &= H H = (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T + (2xx^T)(2xx^T) \\ &= E - 4xx^T + 4x(x^T x)x^T \\ &= E - 4xx^T + 4xx^T \\ &= E, \end{aligned}$$

所以  $H$  是正交矩阵.

4. 设  $A$  与  $B$  都是  $n$  阶正交阵, 证明  $AB$  也是正交阵.

证明 因为  $A, B$  是  $n$  阶正交阵, 故  $A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$ ,

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T A B = B^T A^{-1} A B = E,$$

故  $AB$  也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3,$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda=-1$  (三重).

对于特征值  $\lambda=-1$ , 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程  $(A+E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$  的基础解系  $\mathbf{p}_1=(1, 1, -1)^T$ , 向量  $\mathbf{p}_1$  就是对应于特征值  $\lambda=-1$  的特征值向量.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=9$ .

对于特征值  $\lambda_1=0$ , 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程  $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$  的基础解系  $\mathbf{p}_1=(-1, -1, 1)^T$ , 向量  $\mathbf{p}_1$  是对应于特征值  $\lambda_1=0$  的特征值向量.

对于特征值  $\lambda_2=-1$ , 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程  $(A+E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$  的基础解系  $\mathbf{p}_2=(-1, 1, 0)^T$ , 向量  $\mathbf{p}_2$  就是对应于特征值  $\lambda_2=-1$  的特征值向量.

对于特征值  $\lambda_3=9$ , 由

$$A-9E = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A-9E)x=0$ 的基础解系 $p_3=(1/2, 1/2, 1)^T$ , 向量 $p_3$ 就是对应于特征值 $\lambda_3=9$ 的特征值向量.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,$$

故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=\lambda_4=1$ .

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ , 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)x=0$ 的基础解系 $p_1=(1, 0, 0, -1)^T, p_2=(0, 1, -1, 0)^T$ , 向量 $p_1$ 和 $p_2$ 是对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的线性无关特征值向量.

对于特征值 $\lambda_3=\lambda_4=1$ , 由

$$A-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A-E)x=0$ 的基础解系 $p_3=(1, 0, 0, 1)^T, p_4=(0, 1, 1, 0)^T$ , 向量 $p_3$ 和 $p_4$ 是对应于特征值 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 的线性无关特征值向量.

6. 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, 证明 $A^T$ 与 $A$ 的特征值相同.

证明 因为

$$|A^T-\lambda E| = |(A-\lambda E)^T| = |A-\lambda E|^T = |A-\lambda E|,$$

所以 $A^T$ 与 $A$ 的特征多项式相同, 从而 $A^T$ 与 $A$ 的特征值相同.

7. 设 $n$ 阶矩阵 $A, B$ 满足 $R(A)+R(B)<n$ , 证明 $A$ 与 $B$ 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证明 设 $R(A)=r, R(B)=t$ , 则 $r+t<n$ .

若 $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 显然它们是 $A$ 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

类似地, 设  $b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$  是齐次方程组  $Bx=0$  的基础解系, 则它们是  $B$  的对应于特征值  $\lambda=0$  的线性无关的特征向量.

由于  $(n-r)+(n-t)=n+(n-r-t)>n$ , 故  $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}, b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$  必线性相关. 于是有不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}, l_1, l_2, \dots, l_{n-t}$ , 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} + l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0.$$

记  $\gamma = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} = -(l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t})$ ,

则  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  不全为 0, 否则  $l_1, l_2, \dots, l_{n-t}$  不全为 0, 而

$$l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0,$$

与  $b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$  线性无关相矛盾.

因此,  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma$  是  $A$  的也是  $B$  的关于  $\lambda=0$  的特征向量, 所以  $A$  与  $B$  有公共的特征值, 有公共的特征向量.

8. 设  $A^2 - 3A + 2E = O$ , 证明  $A$  的特征值只能取 1 或 2.

证明 设  $\lambda$  是  $A$  的任意一个特征值,  $x$  是  $A$  的对应于  $\lambda$  的特征向量, 则

$$(A^2 - 3A + 2E)x = \lambda^2 x - 3\lambda x + 2x = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x = 0.$$

因为  $x \neq 0$ , 所以  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 即  $\lambda$  是方程  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  的根, 也就是说  $\lambda = 1$  或  $\lambda = 2$ .

9. 设  $A$  为正交阵, 且  $|A| = -1$ , 证明  $\lambda = -1$  是  $A$  的特征值.

证明 因为  $A$  为正交矩阵, 所以  $A$  的特征值为  $-1$  或  $1$ .

因为  $|A|$  等于所有特征值之积, 又  $|A| = -1$ , 所以必有奇数个特征值为  $-1$ , 即  $\lambda = -1$  是  $A$  的特征值.

10. 设  $\lambda \neq 0$  是  $m$  阶矩阵  $A_{m \times n} B_{n \times m}$  的特征值, 证明  $\lambda$  也是  $n$  阶矩阵  $BA$  的特征值.

证明 设  $x$  是  $AB$  的对应于  $\lambda \neq 0$  的特征向量, 则有

$$(AB)x = \lambda x,$$

于是  $B(AB)x = B(\lambda x)$ ,

或  $BA(Bx) = \lambda(Bx)$ ,

从而  $\lambda$  是  $BA$  的特征值, 且  $Bx$  是  $BA$  的对应于  $\lambda$  的特征向量.

11. 已知 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 求  $|A^3 - 5A^2 + 7A|$ .

解 令  $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ , 则  $\varphi(1) = 3$ ,  $\varphi(2) = 2$ ,  $\varphi(3) = 3$  是  $\varphi(A)$  的特征值, 故

$$|A^3 - 5A^2 + 7A| = |\varphi(A)| = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

12. 已知 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 2,  $-3$ , 求  $|A^* + 3A + 2E|$ .

解 因为  $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6 \neq 0$ , 所以  $A$  可逆, 故

$$A^* = |A|A^{-1} = -6A^{-1},$$

$$A^*+3A+2E=-6A^{-1}+3A+2E.$$

令  $\varphi(\lambda)=-6\lambda^{-1}+3\lambda^2+2$ , 则  $\varphi(1)=-1$ ,  $\varphi(2)=5$ ,  $\varphi(-3)=-5$  是  $\varphi(A)$  的特征值, 故

$$\begin{aligned} |A^*+3A+2E| &= |-6A^{-1}+3A+2E| = |\varphi(A)| \\ &= \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(-3) = -1 \times 5 \times (-5) = 25. \end{aligned}$$

13. 设  $A$ 、 $B$  都是  $n$  阶矩阵, 且  $A$  可逆, 证明  $AB$  与  $BA$  相似.

证明 取  $P=A$ , 则

$$P^{-1}ABP=A^{-1}ABA=BA,$$

即  $AB$  与  $BA$  相似.

14. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  可相似对角化, 求  $x$ .

解 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-6),$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=6$ ,  $\lambda_2=\lambda_3=1$ .

因为  $A$  可相似对角化, 所以对于  $\lambda_2=\lambda_3=1$ , 齐次线性方程组  $(A-E)x=0$  有两个线性无关的解, 因此  $R(A-E)=1$ . 由

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知当  $x=3$  时  $R(A-E)=1$ , 即  $x=3$  为所求.

15. 已知  $p=(1, 1, -1)^T$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$  的一个特征向量.

(1) 求参数  $a, b$  及特征向量  $p$  所对应的特征值;

解 设  $\lambda$  是特征向量  $p$  所对应的特征值, 则

$$(A-\lambda E)p=0, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解之得  $\lambda=-1$ ,  $a=-3$ ,  $b=0$ .

(2) 问  $A$  能不能相似对角化? 并说明理由.

解 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3,$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ .

由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知  $R(A-E)=2$ , 所以齐次线性方程组  $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$  的基础解系只有一个解向量. 因此  $A$  不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称阵化为对角阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

解 将所给矩阵记为  $A$ . 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4$ .

对于  $\lambda_1=-2$ , 解方程  $(A+2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

得特征向量  $(1, 2, 2)^T$ , 单位化得  $\mathbf{p}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$ .

对于  $\lambda_2=1$ , 解方程  $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

得特征向量  $(2, 1, -2)^T$ , 单位化得  $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$ .

对于  $\lambda_3=4$ , 解方程  $(A-4E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得特征向量  $(2, -2, 1)^T$ , 单位化得  $p_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ .

于是有正交阵  $P=(p_1, p_2, p_3)$ , 使  $P^{-1}AP=\text{diag}(-2, 1, 4)$ .

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解 将所给矩阵记为  $A$ . 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$ .

对于  $\lambda_1=\lambda_2=1$ , 解方程  $(A-E)x=0$ , 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得线性无关特征向量  $(-2, 1, 0)^T$  和  $(2, 0, 1)^T$ , 将它们正交化、单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于  $\lambda_3=10$ , 解方程  $(A-10E)x=0$ , 即

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量  $(-1, -2, 2)^T$ , 单位化得  $p_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^T$ .

于是有正交阵  $P=(p_1, p_2, p_3)$ , 使  $P^{-1}AP=\text{diag}(1, 1, 10)$ .

17. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  与  $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似, 求  $x, y$ ; 并求一个正

交阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP=\Lambda$ .

解 已知相似矩阵有相同的特征值, 显然  $\lambda=5, \lambda=-4, \lambda=y$  是  $\Lambda$  的特征值, 故它们也是  $A$  的特征值. 因为  $\lambda=-4$  是  $A$  的特征值, 所以

$$|A+4E| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 9(x-4) = 0,$$

解之得  $x=4$ .

已知相似矩阵的行列式相同, 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -100, \quad |\Lambda| = \begin{vmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{vmatrix} = -20y,$$

所以  $-20y = -100$ ,  $y=5$ .

对于  $\lambda=5$ , 解方程  $(A-5E)x=0$ , 得两个线性无关的特征向量  $(1, 0, -1)^T$ ,  $(1, -2, 0)^T$ . 将它们正交化、单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, 1)^T.$$

对于  $\lambda=-4$ , 解方程  $(A+4E)x=0$ , 得特征向量  $(2, 1, 2)^T$ , 单位化得

$$p_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T.$$

$$\text{于是有正交矩阵 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ 使 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

18. 设 3 阶方阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=-2$ ,  $\lambda_3=1$ ; 对应的特征向量依次为  $p_1=(0, 1, 1)^T$ ,  $p_2=(1, 1, 1)^T$ ,  $p_3=(1, 1, 0)^T$ , 求  $A$ .

解 令  $P=(p_1, p_2, p_3)$ , 则  $P^{-1}AP = \text{diag}(2, -2, 1) = \Lambda$ ,  $A = P\Lambda P^{-1}$ .

因为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设 3 阶对称阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=-1$ ,  $\lambda_3=0$ ; 对应  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  的特征向量依次为  $p_1=(1, 2, 2)^T$ ,  $p_2=(2, 1, -2)^T$ , 求  $A$ .

解 设  $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ , 则  $Ap_1 = 2p_1, Ap_2 = -2p_2$ , 即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 2, \text{---} \textcircled{1} \\ x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -1, \text{---} \textcircled{2} \\ 2x_3 + x_5 - 2x_6 = 2 \end{cases}$$

再由特征值的性质, 有

$$x_1 + x_4 + x_6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \text{---} \textcircled{3}$$

由①②③解得

$$x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_6, \quad x_2 = \frac{1}{2}x_6, \quad x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}x_6,$$

$$x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_6, \quad x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}x_6.$$

令  $x_6 = 0$ , 得  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{2}{3}$ .

因此 
$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$ , 与特征值  $\lambda_1 = 6$  对应的特征向量为  $p_1 = (1, 1, 1)^T$ , 求  $A$ .

解 设  $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ .

因为  $\lambda_1 = 6$  对应的特征向量为  $p_1 = (1, 1, 1)^T$ , 所以有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 6 \end{cases} \text{---} \textcircled{1}.$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$  是  $A$  的二重特征值, 根据实对称矩阵的性质定理知  $R(A - 3E) = 1$ . 利用①可推出

$$A-3E = \begin{pmatrix} x_1-3 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix}.$$

因为  $R(A-3E)=1$ , 所以  $x_2=x_4-3=x_5$  且  $x_3=x_5=x_6-3$ , 解之得

$$x_2=x_3=x_5=1, x_1=x_4=x_6=4.$$

因此  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

21. 设  $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T, a_1 \neq 0, A=aa^T$ .

(1) 证明  $\lambda=0$  是  $A$  的  $n-1$  重特征值;

证明 设  $\lambda$  是  $A$  的任意一个特征值,  $x$  是  $A$  的对应于  $\lambda$  的特征向量, 则有

$$Ax = \lambda x,$$

$$\lambda^2 x = A^2 x = aa^T aa^T x = a^T a Ax = \lambda a^T a x,$$

于是可得  $\lambda^2 = \lambda a^T a$ , 从而  $\lambda=0$  或  $\lambda=a^T a$ .

设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的所有特征值, 因为  $A=aa^T$  的主对角线上的元素为  $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ , 所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a^T a = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

这说明在  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  中有且只有一个等于  $a^T a$ , 而其余  $n-1$  个全为 0, 即  $\lambda=0$  是  $A$  的  $n-1$  重特征值.

(2) 求  $A$  的非零特征值及  $n$  个线性无关的特征向量.

解 设  $\lambda_1 = a^T a, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

因为  $Aa = aa^T a = (a^T a)a = \lambda_1 a$ , 所以  $p_1 = a$  是对应于  $\lambda_1 = a^T a$  的特征向量.

对于  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ , 解方程  $Ax = 0$ , 即  $aa^T x = 0$ . 因为  $a \neq 0$ , 所以  $a^T x = 0$ , 即  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ , 其线性无关解为

$$p_2 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$p_3 = (-a_3, 0, a_1, \dots, 0)^T,$$

$\dots,$

$$p_n = (-a_n, 0, 0, \dots, a_1)^T.$$

因此  $n$  个线性无关特征向量构成的矩阵为

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{100}$ .

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=1, \lambda_2=5, \lambda_3=-5$ .

对于  $\lambda_1=1$ , 解方程  $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 得特征向量  $\mathbf{p}_1=(1, 0, 0)^T$ .

对于  $\lambda_1=5$ , 解方程  $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 得特征向量  $\mathbf{p}_2=(2, 1, 2)^T$ .

对于  $\lambda_1=-5$ , 解方程  $(A+5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 得特征向量  $\mathbf{p}_3=(1, -2, 1)^T$ .

令  $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ , 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, 5, -5) = \Lambda,$$

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

因为

$$\Lambda^{100} = \text{diag}(1, 5^{100}, 5^{100}),$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} A^{100} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^{100} & \\ & & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23. 在某国, 每年有比例为  $p$  的农村居民移居城镇, 有比例为  $q$  的城镇居民移居农村, 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把  $n$  年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为  $x_n$  和  $y_n$  ( $x_n+y_n=1$ ).

(1) 求关系式  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  中的矩阵  $A$ ;

解 由题意知

$$x_{n+1} = x_n + qy_n - px_n = (1-p)x_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + px_n - qy_n = px_n + (1-q)y_n,$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

因此  $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ , 求  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$

解 由  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  可知  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$  由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+p+q),$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=1, \lambda_2=r$ , 其中  $r=1-p-q$ .

对于  $\lambda_1=1$ , 解方程  $(A-E)x=0$ , 得特征向量  $p_1=(q, p)^T$ .

对于  $\lambda_2=r$ , 解方程  $(A-rE)x=0$ , 得特征向量  $p_2=(-1, 1)^T$ .

令  $P=(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ , 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, r) = \Lambda,$$

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}.$$

于是 
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q+(p-q)r^n \\ 2p+(q-p)r^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

24. (1) 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $\varphi(A) = A^{10} - 5A^9$ ;

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5),$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=1, \lambda_2=5$ .

对于  $\lambda_1=1$ , 解方程  $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 得单位特征向量  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ .

对于  $\lambda_2=5$ , 解方程  $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 得单位特征向量  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$ .

于是有正交矩阵  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 使得  $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 5) = \Lambda$ ,

从而  $A = P\Lambda P^{-1}, A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ . 因此

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 5\Lambda^9)P^{-1} \\ &= P[\text{diag}(1, 5^{10}) - 5\text{diag}(1, 5^9)]P^{-1} \\ &= P\text{diag}(-4, 0)P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $\varphi(A) = A^{10} - 6A^9 + 5A^8$ .

解 求得正交矩阵为

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

使得  $P^{-1}AP = \text{diag}(-1, 1, 5) = \Lambda, A = P\Lambda P^{-1}$ . 于是

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 6\Lambda^9 + 5\Lambda^8)P^{-1} \\ &= P[\Lambda^8(\Lambda - E)(\Lambda - 5E)]P^{-1} \\ &= P\text{diag}(1, 1, 5^8)\text{diag}(-2, 0, 4)\text{diag}(-6, -4, 0)P^{-1} \\ &= P\text{diag}(12, 0, 0)P^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1)  $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$ ;

解  $f=(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

(2)  $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$ ;

解  $f=(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

(3)  $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$ .

解  $f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ .

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1)  $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ;

解 二次型的矩阵为  $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(2)  $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ .

解 二次型的矩阵为  $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1)  $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ ;

解 二次型的矩阵为  $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=2, \lambda_2=5, \lambda_3=1$ .

当  $\lambda_1=2$  时, 解方程  $(A-2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , 由

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量  $(1, 0, 0)^T$ . 取  $p_1 = (1, 0, 0)^T$ .

当  $\lambda_2=5$  时, 解方程  $(A-5E)x=0$ , 由

$$A-5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量  $(0, 1, 1)^T$ . 取  $p_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ .

当  $\lambda_3=1$  时, 解方程  $(A-E)x=0$ , 由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量  $(0, -1, 1)^T$ . 取  $p_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ .

于是有正交矩阵  $T=(p_1, p_2, p_3)$  和正交变换  $x=Ty$ , 使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

(2)  $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$ .

解 二次型矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=-1, \lambda_2=3, \lambda_3=\lambda_4=1$ .

当  $\lambda_1=-1$  时, 可得单位特征向量  $p_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ .

当  $\lambda_2=3$  时, 可得单位特征向量  $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ .

当  $\lambda_3=\lambda_4=1$  时, 可得线性无关的单位特征向量

$$p_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \quad p_4 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

于是有正交矩阵  $T=(p_1, p_2, p_3, p_4)$  和正交变换  $x=Ty$ , 使

$$f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$$

化成标准方程.

解 二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ .

由  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-11)$ , 得  $A$  的特征值为  $\lambda_1=2$ ,

$\lambda_2=11, \lambda_3=0$ .

对于  $\lambda_1=2$ , 解方程  $(A-2E)x=0$ , 得特征向量  $(4, -1, 1)^T$ , 单位化得

$$p_1 = \left( \frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right).$$

对于  $\lambda_2=11$ , 解方程  $(A-11E)x=0$ , 得特征向量  $(1, 2, -2)^T$ , 单位化得

$$p_2 = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

对于  $\lambda_3=0$ , 解方程  $Ax=0$ , 得特征向量  $(0, 1, 1)^T$ , 单位化得  $p_3 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

于是有正交矩阵  $P=(p_1, p_2, p_3)$ , 使  $P^{-1}AP = \text{diag}(2, 11, 0)$ , 从而有正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程  $2u^2 + 11v^2 = 1$ .

29. 明: 二次型  $f = x^T Ax$  在  $\|x\|=1$  时的最大值为矩阵  $A$  的最大特征值.

证明  $A$  为实对称矩阵, 则有一正交矩阵  $T$ , 使得

$$TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda$$

成立, 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的特征值, 不妨设  $\lambda_1$  最大.

作正交变换  $y = Tx$ , 即  $x = T^T y$ , 注意到  $T^{-1} = T^T$ , 有

$$f = x^T Ax = y^T TAT^T y = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

因为  $y=Tx$  正交变换, 所以当  $\|x\|=1$  时, 有

$$\|y\|=\|x\|=1, \text{ 即 } y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

因此

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \leq \lambda_1,$$

又当  $y_1=1, y_2=y_3=\cdots=y_n=0$  时  $f=\lambda_1$ , 所以  $f_{\max}=\lambda_1$ .

30. 用配方法化下列二次形成规范形, 并写出所用变换的矩阵.

(1)  $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ ;

解  $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2x_3+2x_2^2+x_3^2$$

$$=(x_1+x_2-2x_3)^2-2x_2^2+(2x_2+x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \sqrt{2}x_2 \\ y_3 = 2x_2 + x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{5}{\sqrt{2}}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3 = -\sqrt{2}y_2 + y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)  $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$ ;

解  $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$$=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3;$$

$$=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$

解  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2x_3)^2 + 2x_3^2.$$

令 
$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - 2x_3), \text{ 即} \\ y_3 = \sqrt{2}x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2 = \sqrt{2}y_2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求  $a$ .

解 二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ , 其主子式为

$$a_{11} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -a(5a + 4).$$

因为  $f$  为正主二次型, 所以必有  $1 - a^2 > 0$  且  $-a(5a + 4) > 0$ , 解之得  $-\frac{4}{5} < a < 0$ .

32. 判别下列二次型的正定性:

(1)  $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3;$

解 二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ . 因为

$$a_{11} = -2 < 0, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0, |A| = -38 < 0,$$

所以  $f$  为负定.

$$(2) f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4.$$

解 二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix}$ . 因为

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0, |A| = 24 > 0,$$

所以  $f$  为正定.

33. 证明对称阵  $A$  为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵  $U$ , 使  $A = U^T U$ , 即  $A$  与单位阵  $E$  合同.

证明 因为对称阵  $A$  为正定的, 所以存在正交矩阵  $P$  使

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda, \text{ 即 } A = P \Lambda P^T,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  均为正数. 令  $\Lambda_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , 则  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_1$ ,  $A = P \Lambda_1 \Lambda_1^T P^T$ . 再令  $U = \Lambda_1^T P^T$ , 则  $U$  可逆, 且  $A = U^T U$ .